

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Голицына Мария Вадимовна

**АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ
ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель: Самсонов Виталий Александрович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: Болотник Николай Николаевич,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
зав. лабораторией

Кобрин Александр Исаакович,
доктор физико-математических наук,
профессор
Национальный исследовательский университет МЭИ,
Институт энергомашиностроения и механики,
кафедра теоретической механики, профессор

Павловский Владимир Евгеньевич,
доктор физико-математических наук,
профессор
ФИЦ Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН,
главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится 02 марта 2018г. в 17:00 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы д.1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: msu.01.10@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/93304393/>

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.10
кандидат физико-математических наук

Зобова
Александра Александровна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертационной работе рассматривается плоское движение вибрационного робота в поле силы тяжести, состоящего из жесткого корпуса, внутри которого вращается несбалансированный ротор (физический маятник). Движение происходит по горизонтальной шероховатой плоскости. Рассматривается кулоновская изотропная модель сухого трения. Управление системой происходит за счет выбора углового ускорения внутреннего тела. В данной работе налагается ряд фазовых ограничений, в рамках которых происходит поиск закона управления, обеспечивающего периодическое движение робота. Помимо этого, проведена параметрическая оптимизация управления с целью максимизации средней скорости робота. Найденный режим обеспечивает невозвратное движение системы (робот либо стоит, либо имеет положительную скорость), таким образом обеспечивая высокую энергоэффективность управления.

Решаемая задача актуальна, поскольку указанный принцип перемещения робота позволяет обеспечить изолированность внутренних частей от внешней среды, за счет этого вибрационные роботы могут быть применены в агрессивных и запыленных средах, в том числе во время пожаров, в пустынях и на необитаемых планетах. Благодаря достаточно простой конструкции, роботы такого типа могут быть представлены в наноразмерах и использоваться в соответствующих исследованиях. Вибрационные роботы широко используются для очистки нефтяных труб, поскольку периодические движения корпуса тела позволяют повысить качество очистки в сравнении с другими механизмами.

Цели диссертационной работы

- Построить режим управления вибрационным роботом, обеспечивающий периодическое движение системы при наложенных ограничениях.
- Определить набор параметров управления, при которых построенный режим обеспечивает максимальную скорость движения робота в заданном направлении, а также определить границы значений параметров системы, при которых построенный режим осуществим.
- Обосновать оптимальность построенного режима с точки зрения средней скорости движения вибрационного робота в некотором классе движений.
- Разработать модификацию алгоритма, которая будет обеспечивать возврат движения робота на построенный режим, как при малых отклонении-

ях, так и при больших. В том числе обеспечить выход движения системы на предложенный периодический режим с нулевых начальных условий.

- Обеспечить адаптируемость построенного режима к переменному значению коэффициента сухого трения.

Методы исследования, достоверность и обоснованность результатов

Для достижения поставленных целей в работе используются методы теоретической механики. Для моделирования трения используется закон сухого трения Амонтона-Кулона. Для моделирования экспериментов используются численные методы интегрирования дифференциальных уравнений, выполняемые в программе математического моделирования WOLFRAM Mathematica.

Результаты диссертационной работы строго обоснованы на базе основных теорем динамики, качественной теории динамических систем и теории управления. Существование области параметров, в которых полученные результаты применимы для реальных мехатронных систем, подтверждено аналитическими оценками и численным моделированием.

Научная новизна

В работе предложен новый подход к построению управления, основным принципом которого является обеспечение на максимально большом промежутке времени, в условиях ограничений задачи, движения без трения. В рамках этого подхода было получено три новых режима управления рассматриваемой конструкцией, два из которых обеспечивают периодическое движение робота в заданном направлении. Проведен анализ параметров, при которых построенный закон управления достижим, а также реализована параметрическая оптимизация управления с целью максимизации средней скорости движения робота. Помимо этого представлено обоснование оптимальности одного из режимов управления в некотором классе движений. Проведен анализ энергозатрат при движении с предложенным законом управления.

Положения, выдвинутые на защиту

- Построено два режима управления, обеспечивающих периодическое движение робота, представленного корпусом и маятником, закрепленным в его центре, по шероховатой плоскости. Каждый из режимов обеспечивает невозвратное движение (движение в одном направлении) корпуса робота в заданном направлении, при этом на одном периоде есть фаза движения корпуса и фаза покоя. На фазе движения робот осуществляет скольжение без трения (обеспечивается нулевое давление на опору) на наибольшем, в рамках ограничений, участке фазы движения.

- Для предложенных законов управления определены параметры управления, максимизирующие среднюю скорость робота.
- Определены границы значений параметров системы и управления, при которых робот может совершать движение с предложенным законом управления.

В работе показано, что при фиксированном значении ограничения на угловое ускорение, при любых достаточно больших значениях коэффициента трения построенный режим будет осуществим. Также построена численная зависимость средней скорости робота от выбранного коэффициента трения и показано, что в случае, если ограничение на минимум и максимум значения углового ускорения по модулю одинаково, то рост коэффициента трения ведет к снижению средней скорости, а в случае одностороннего ограничения (угловое ускорение ограничено только сверху), наоборот, рост коэффициента трения ведет к росту средней скорости робота. В промежуточном случае, когда ограничение на угловое ускорение есть и на минимум, и на максимум, но оно разное по модулю, существует оптимальный, с точки зрения средней скорости, коэффициент трения.

В работе также показано, что существует граничное минимальное значение коэффициента трения (при фиксированном значении ограничения на угловое ускорение), при котором рассматриваемое движение реализуемо.

- В некотором классе движений доказана оптимальность найденного закона управления для случая равного по модулю ограничения на минимум и максимум углового ускорения с точки зрения максимизации средней скорости робота.
- Оценены энергетические затраты вращающей силы (обеспеченной двигателем, установленным в основании маятника), обеспечивающей вращение маятника. Продемонстрировано преимущество найденного закона перед релейным типом управления. Угловое ускорение маятника при таком управлении может принимать всего два значения: φ''_{max} и φ''_{min} . Значение φ''_{min} и точки переключения с одного режима на другой выбираются из соображения периодичности движения и максимизации средней скорости робота.
- Представлена модификация алгоритма, позволяющая роботу выходить из состояния покоя (начальная угловая скорость маятника и скорость корпуса равны нулю) на указанный режим, а также возвращаться на него при небольших отклонениях. В том числе, полученная модифика-

ция позволяет адаптироваться к переменному значению коэффициента трения, а также определять его, если оно заранее неизвестно.

Теоретическая и практическая ценность

Теоретическая ценность данной работы заключается в построении и анализе математической модели вибрационного робота, представленного корпусом и маятником, закрепленным внутри него.

В работе построено новое управление, обеспечивающее периодическое движение робота как при ограничении на угловое ускорение по модулю, так и при ограничении на него сверху. Для этого управления определен набор параметров, максимизирующий скорость перемещения робота, а также граничные значения параметров, при которых полученный режим реализуем. В работе доказано, что полученный режим обеспечивает максимальную скорость робота в некотором классе движений. Также показано, что энергетические затраты на обеспечение данного режима в случае рекуперации энергии крайне малы, это связано с тем, что предложенный режим обеспечивает перемещение на максимально большом, в рамках ограничений задачи, промежутке без трения.

Практическая ценность работы заключается в том, что при помощи полученных результатов для робота, рассматриваемой конструкции, можно реализовать указанное движение. Это стало возможным, благодаря определению алгоритма выхода на полученный режим с нулевых начальных условий, а также модификации алгоритма, которая позволяет определять действительное значение коэффициента трения в случае неверной первичной оценки, и корректировать управление соответствующим образом. Роботы такой конструкции могут быть использованы в агрессивных средах, где значительную роль играет изолированность внутренних деталей. Полученный режим позволит роботу быстро перемещаться с небольшими энергозатратами.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на следующих научно-технических семинарах:

- Семинар Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского;
- Семинар по аналитической механике и теории устойчивости им. В.В. Румянцева кафедры теоретической механики МГУ имени М.В. Ломоносова

а также на следующих внутренних и международных конференциях:

- 13th International Conference "Dynamical Systems - Theory and Applications" (DSTA 2015) - Poland, Lodz, December 6-10, 2015.

- 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, France, La Rochelle, July 4-8, Диплом за лучший доклад среди студентов и аспирантов.
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, секция "Общая и прикладная механика Россия, г.Казань, август 20-24, 2015, "Диплом за лучший доклад" в своей секции.
- XXVIII Международная научная конференция "Математические методы в технике и технологиях ММТТ", Россия, г.Ярославль, июнь 2-4, 2015.

По теме диссертации был также выигран конкурс молодых ученых УМНИК (Участник молодежного научно-инновационного конкурса) 2015.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в семи печатных работах, три из которых [1-3] опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад

Представленные в диссертации результаты получены лично соискателем. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Построение математической модели, законов управления и анализ движения системы выполнены соискателем лично.

Автор благодарен Мартыненко Юрию Григорьевичу и Самсонову Виталию Александровичу за постановку задачи и научное руководство, Формальскому Александру Моисеевичу за ценные замечания и конструктивную критику.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, приложения и списка литературы. Полный объем диссертации **130** страниц текста с **44** рисунками. Список литературы содержит **62** наименований.

Содержание работы

Во **введении** приведен обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность решаемой проблемы, поставлены задачи исследования, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы. Также представлено краткое содержание работы, перечислены публикации и доклады по теме исследования.

В **первой главе** описана математическая модель рассматриваемого механизма и выведены уравнения движения в размерных и безразмерных величинах.

Здесь, как и далее, предполагается отсутствие подскока корпуса (то есть корпус робота не отрывается от поверхности, и сверху его ничего не держит). Движение робота разделено на две фазы - скольжение корпуса вперед и покой. На модуль углового ускорения маятника наложено ограничение сверху. Условия периодичности движения робота в данной главе не предполагается, однако считается, что в моменты начала и окончания фазы покоя углы отклонения маятника симметричны относительно вертикальной оси. В последующих главах это ограничение снимается.

Для описанного выше класса движений в главе найден режим управления, состоящий из семи отдельных участков. Первые три участка относятся к фазе движения и обеспечивают на максимально большом участке движение тела без трения, оставшиеся четыре относятся к участку покоя и обеспечивают максимально быстрый переход в фазу движения.

Рассматриваемый робот представляет собой конструкцию, представленную на рисунке 1.

Рассматривается плоское движение вибрационного робота в поле силы тяжести, состоящего из корпуса массы M , внутри которого вращается несбалансированный ротор (физический маятник) массы m . Длина от точки закрепления до центра масс маятника равна l . Корпус может перемещаться по шероховатой плоскости вдоль горизонтальной оси X . Между плоскостью и роботом действует кулоновская сила сухого трения.

Движение робота определяется двумя обобщенными координатами: углом φ отклонения маятника от направления ускорения свободного падения, отсчитываемым против часовой стрелки, и координатой центра масс корпуса x (рис. 1). Рассматривается система, для которой выполняются следующие условия:

1. размер корпуса робота достаточно велик, чтобы обеспечить неопрокидывание системы,

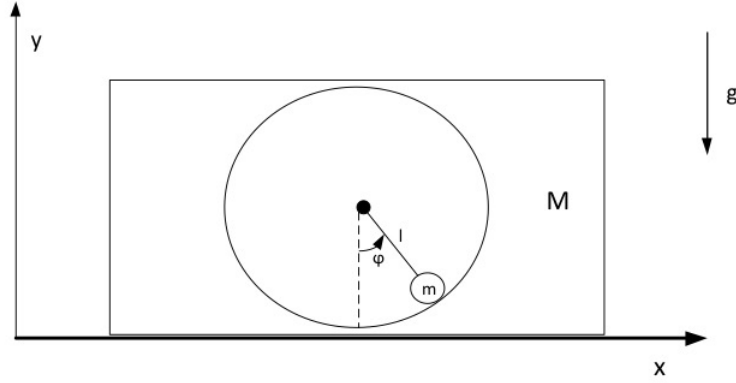


Рис. 1: Рассматриваемая модель вибрационного робота

2. управление роботом осуществляется за счет выбора углового ускорения маятника $\ddot{\varphi}$.

Для этой системы необходимо построить управление, такое что:

1. сила реакции связи неотрицательна, что обеспечивает безотрывное движение корпуса:

$$N \geq 0 \quad (1)$$

2. в течение одного оборота маятника движение робота проходит две фазы:

$$\dot{x} > 0 \text{ — фаза движения (скольжения), } \dot{x} = 0 \text{ — фаза покоя,} \quad (2)$$

3. угловая скорость маятника

$$\dot{\varphi} > 0, \quad (3)$$

4. начальные и конечные углы отклонения маятника на фазе покоя (и, соответственно, на фазе скольжения) симметричны относительно вертикальной оси:

$$\varphi_{end \text{ gliding phase}} = 2\pi - \varphi_{start \text{ gliding phase}}, \quad (4)$$

(Это условие наложено в рамках данной главы для упрощения поиска искомого управления.)

5. на модуль углового ускорения наложено ограничение:

$$|\ddot{\varphi}| \leq \ddot{\varphi}_{max}, \quad (5)$$

Это ограничение отвечает техническим характеристикам мотора, передающего момент вращения маятнику,

6. ищется управление, которое обеспечивает максимизацию средней скорости движения корпуса вибрационного робота.

Определим уравнения, описывающие движение системы. Поскольку в рамках рассматриваемого класса движений корпус робота не совершает подскока, то уравнения движения имеют вид:

$$(m + M)\ddot{X}_{cr} = R \quad (6)$$

$$R = \begin{cases} -\mu N \text{sign}(\dot{x}), & \text{при } \dot{x} \neq 0, \\ ml(\sin \varphi) \ddot{\varphi}, & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } ml|\sin(\varphi) \ddot{\varphi}| \leq \mu|N|, \\ \mu N \text{sign}(\sin \varphi \ddot{\varphi}), & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } ml|(\sin \varphi) \ddot{\varphi}| \geq \mu|N| \end{cases} \quad (7)$$

$$N = (m + M)g - ml(\cos \varphi) \ddot{\varphi}, \quad (8)$$

где

$$X_{cr} = (Mx + m(x + l \sin \varphi))/(m + M) \quad (9)$$

- координата центра масс системы, N - нормальная сила реакции опоры, а μ - коэффициент сухого трения.

Для робота, движение которого определяется уравнениями (6),(7),(8), ставится задача поиска периодического движения корпуса при ограничениях (1),(2),(3) (4) и (5). При этом управление должно быть выбрано из соображений увеличения средней скорости корпуса. Будем считать, что существует предел $\frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) dt$ при $T \rightarrow \infty$, назовем его средней скоростью $\dot{x}_{av}$.

Выпишем уравнение движения центра масс системы вдоль оси X для случая $\dot{x} > 0$:

$$(m + M)\ddot{X}_{cr} = -\mu N \quad (10)$$

Введем безразмерные и характерные величины:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\eta}, \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\phi} \quad (11)$$

Здесь через (η, τ, ϕ) обозначены характерные, а через $(\tilde{\bullet})$ - безразмерные величины. Все дальнейшие выводы будут сделаны для безразмерных величин и тильды в их обозначении будут опущены.

Характерные величины определим следующим образом: $\eta = \frac{ml}{m+M}$, $\tau = \sqrt{\frac{\eta}{g}}$, $\phi = 1 \text{ rad}$.

После подстановки замен (11) в уравнение (8) получим следующее уравнение для нормальной силы реакции опоры:

$$N = 1 - (\cos \varphi)'' \quad (12)$$

Здесь штрих означает производную по безразмерному времени.

После подстановки (11) в (10), учитывая $x' \neq 0$ и выражение (12), можно определить уравнение движения для фазы скольжения:

$$(x + (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))'' = -\mu \quad (13)$$

Как видно, в безразмерных величинах в уравнение движения входит один параметр $-\mu$. Аналогично можно рассмотреть уравнение движения центра масс в проекции на ось x для случая $x' = 0$.

Ниже представлены уравнения движения маятника по конусу трения при покое корпуса робота, которые соответствуют движению, при котором трение имеет максимальное по модулю значение и направлено в сторону роста x (14) и в сторону уменьшения x (15).

$$(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)'' = \mu \quad (14)$$

$$(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)'' = -\mu \quad (15)$$

Сначала в работе определяется управление на фазе движения. Показывается, что наименьшая потеря скорости центра масс будет происходить при движении без трения (следует из (10)). Управление с нулевым трением, и, как следствие, нулевой реакцией опоры будет обеспечиваться в том числе и для положения $\varphi = \pi$. Для этого положения соответствующая угловая скорость маятника определяется однозначно: $\varphi' = 1$. В первой главе показано, что если задано ограничение (5) и известно, что в вертикальном положении трение должно быть равно нулю, то условия (φ, φ') на конец и начало движения без трения определяются однозначно.

До выхода на участок движения без трения, выбирается управление с минимальным значением углового ускорения $\varphi'' = -\varphi''_{max}$, после участка с $N = 0$ вплоть до остановки робота движение осуществляется с $\varphi'' = \varphi''_{max}$.

Положим время начала движения равным t_0 , обозначим момент переключения на участок с $N = 0$ через t_1 , время конца движения по этому участку через t_2 , t_3 - время, соответствующее концу фазы движения.

На фазе покоя управление определяется условием симметричности участка покоя (4), и минимизации времени фазы покоя. В главе доказано следующее утверждение:

Утверждение. Во время фазы покоя управление ускорением, заданное следующим образом, обеспечивает максимальную среднюю скорость вращения маятника на фазе покоя:

1. с t_3 до t_4 – движение с максимально возможным ускорением по конусу трения вплоть до достижения ограничения по ускорению φ''_{max} ,
2. с t_4 до t_5 – движение по ограничению $\varphi'' = \varphi''_{max}$
3. с t_5 до t_6 – движение по ограничению $\varphi'' = -\varphi''_{max}$
4. с t_6 до t_7 движение с минимально возможным ускорением по конусу трения вплоть до достижения начальных условий фазы скольжения φ_7 и φ'_7 .

Здесь через t_4-t_6 обозначены времена переключения между участками фазы покоя.

Таким образом в первой главе был построен следующий закон управления вибрационным роботом:

$$\varphi'' = \begin{cases} -\varphi''_{max}, & \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ \frac{-1-\varphi'^2 \cos \varphi}{\sin \varphi}, & \varphi_1 < \varphi < (2\pi - \varphi_1) \\ \varphi''_{max}, & x' > 0 \\ \frac{\mu + \varphi'^2(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{\cos \varphi - \mu \sin \varphi}, & x' = 0 \cap \frac{\mu + \varphi'^2(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{\cos \varphi - \mu \sin \varphi} \leq \varphi''_{max} \\ \varphi''_{max}, & x' = 0 \cap \varphi \leq \varphi_5 \\ -\varphi''_{max}, & x' = 0 \cap \varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_6 \\ \frac{-\mu + \varphi'^2(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}{\cos \varphi + \mu \sin \varphi}, & x' = 0 \cap \varphi_6 \leq \varphi \leq \varphi_7 \end{cases} \quad (16)$$

Система (16) описывает закон управления только для первого оборота, для остальных можно построить по аналогии.

Первые три участка уравнения относятся к участку движения корпуса, а оставшиеся – к участку покоя.

Полученное управление сравнивалось с релейным законом управления, который обеспечивает периодический режим движения робота. Угловое ускорение маятника при таком управлении может принимать всего два значения: φ''_{max} и φ''_{min} . Значение φ''_{min} и точки переключения с одного режима на другой выбираются из соображения периодичности движения и максимизации средней скорости робота.

Построенное управление при численном сравнении этих двух режимов показало преимущество по перемещению. Кроме того, в отличие от релейного закона, предложенный закон позволяет осуществлять невозвратное движение, тем самым снижая энергетические затраты.

Заключение к первой главе. В первой главе были получены основные уравнения движения робота. В заданном классе движений был найден закон управления, состоящий из семи отдельных участков. На фазе движения есть три участка управления, которые на максимально возможном, в рамках заданных ограничений, промежутке обеспечивают нулевое трение. Фазе покоя соответствуют оставшиеся четыре участка управления.

В главе представлены численные результаты, которые подтвердили аналитические выводы, а так же проведено сравнение полученного режима управления с релейным. Найденный режим управления позволил значительно увеличить перемещение робота.

Численные эксперименты также показали, что со временем найденное управление выходит на периодический режим.

Во **второй главе** на движение рассматриваемой системы накладывается условие периодичности. Рассматривается два различных ограничения на угловое ускорение маятника: ограничение на модуль углового ускорения сверху и ограничение на его максимум. В заданных ограничениях найдено два режима управления, а также произведена параметрическая оптимизация с целью максимизации средней скорости робота.

Для случая ограничения по модулю, найденное решение представлено ниже:

$$\varphi'' = \begin{cases} -\varphi''_{max}, & \varphi_6(mod2\pi) < \varphi(mod2\pi) \leq \varphi_1(mod2\pi) \\ \frac{-1-\varphi'^2 \cos \varphi}{\sin \varphi}, & \varphi_1(mod2\pi) < \varphi(mod2\pi) \leq (2\pi - \varphi_1)(mod2\pi) \\ \varphi''_{max}, & (2\pi - \varphi_1)(mod2\pi) < \varphi(mod2\pi) \leq \varphi_3(mod2\pi) \\ \frac{\mu+\varphi'^2(\sin \varphi+\mu \cos \varphi)}{\cos \varphi-\mu \sin \varphi}, & \varphi_3(mod2\pi) < \varphi(mod2\pi) \leq \varphi_5(mod2\pi) \\ \varphi''_{max}, & \varphi_5(mod2\pi) < \varphi(mod2\pi) \leq 2\pi \cup 0 < \varphi(mod2\pi) \leq \varphi_6(mod2\pi) \end{cases} \quad (17)$$

При поиске данного решения был введен параметр τ_1 - время движения робота до выхода на участок без трения, и по нему была произведена оптимизация. В результате оптимальное значение τ_1 равно максимально возможному значению этого параметра при условии наложенных ограничений.

В первой и второй главе показано, как определить углы переключения между участками движения через параметры управления. Однако отметим, что при численном моделировании условием переключения с третьего

на четвертый участок управления служит остановка робота, то есть проверка равенства $x' = 0$, условием переключения на пятый участок - равенство ускорения своему ограничению $\varphi'' = \varphi''_{max}$, переключение между остальными участками определяется по значению угла φ .

В построенном управлении (17) второе и третье уравнение отвечают движению корпуса, четвертое и пятое - покою. Первое уравнение в зависимости от параметров может либо относиться к движению, либо заключать в себе естественный переход из покоя в движение.

Для построения управления при отсутствии ограничения на минимум углового ускорения, вводился параметр φ''_{min} , такой, что на всем периоде $\varphi'' \geq \varphi''_{min}$ и после по нему проводилась оптимизация. В результате был получен следующий закон управления:

$$\varphi'' = \begin{cases} \frac{-1-\varphi'^2 \cos \varphi}{\sin \varphi}, & \varphi_1(mod 2\pi) < \varphi(mod 2\pi) \leq (2\pi - \varphi_1)(mod 2\pi) \\ \varphi''_{max}, & (2\pi - \varphi_1)(mod 2\pi) < \varphi(mod 2\pi) \leq \varphi_3(mod 2\pi) \\ \frac{\mu+\varphi'^2(\sin \varphi+\mu \cos \varphi)}{\cos \varphi-\mu \sin \varphi}, & \varphi_3(mod 2\pi) < \varphi(mod 2\pi) \leq \varphi_5(mod 2\pi) \\ \varphi''_{max}, & \varphi_5(mod 2\pi) < \varphi(mod 2\pi) \leq 2\pi \cup 0 < \varphi(mod 2\pi) \leq \varphi_1(mod 2\pi) \end{cases} \quad (18)$$

Здесь φ_i обозначают те же углы, что и ранее: φ_1 - угол начала движения с управлением $N = 0$, φ_3 - угол остановки корпуса робота, φ_5 угол переключения на управление $\varphi'' = \varphi''_{max}$ на фазе покоя.

Для численного моделирования брался следующий набор параметров:

$$m = 1 \text{ кг.}, \quad M = 4 \text{ кг.}, \quad l = 0.25 \text{ м.}, \quad g = 9.8 \text{ м./с.}^2 \quad (19)$$

Такие параметры могут быть, например, при следующих характерных величинах: $\mu = 0.5$, $\eta = 0.05$, $\tau = 0.064$.

Сравним различные режимы управления. На рис. 2 представлена зависимость скорости центра масс корпуса от времени для представленных законов управления:

- Первая линия соответствует движению при релейном управлении, обеспечивающем периодическое движение. Этот режим совпадает с релейным управлением, упомянутым в первой главе.
- Вторая линия отображает движение, соответствующее управлению, схожему с представленным выше. Отличие состоит в том, что вместо условия периодичности наложено условие симметричности фазы покоя по углу (то есть $\varphi_7 = 4\pi - \varphi_3$). Данное управление получено и рассмотрено в первой главе диссертации.

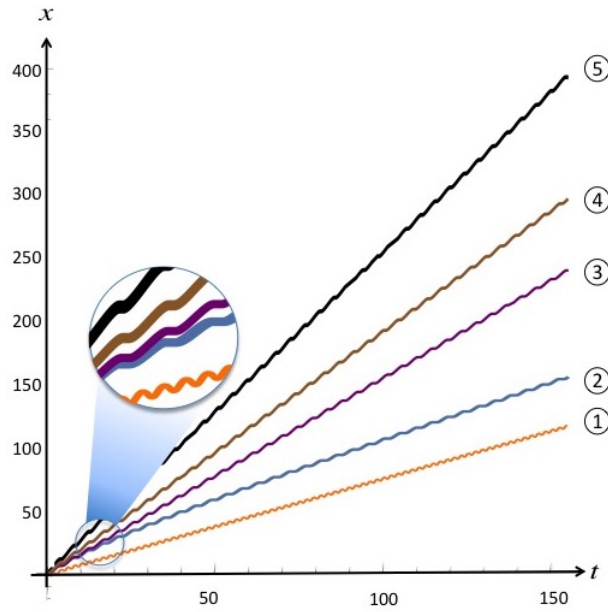


Рис. 2: Сравнение режимов управления с добавлением случая с асимметричным ограничением на φ''

- Третья линия отвечает представленному выше управлению (17) со значением параметра $\tau_1 = 0.25$.
- Четвертая линия соответствует управлению (17) с оптимальным значением параметра $\tau_1 = \tau_{1opt}$.
- Пятая линия соответствует движению с оптимальными параметрами $\tau_1 = \tau_{1opt}$ и $\varphi''_{min} = \varphi''_{minopt}$.

Начальные условия на скорость и положение корпуса (x и x'), значения параметров и ограничения выбраны для всех решений одинаковыми, поэтому сравнение данных графиков целесообразно. Время, на котором происходит движение, приблизительно равно десяти секундам в размерных величинах. Расстояние, которое позволяет пройти четвертое управление, составляет примерно 11.8 метров, для третьего управления оно составляет 9.5 метра, что почти вдвое больше расстояния, пройденного при релейном управлении. Пятое управление позволяет переместить робот за десять секунд на 15.8 метров, что на 33% больше, чем при четвертом управлении.

Отметим также, что, как видно из рис. 2, движение при управлениях 2 – 5 осуществляется исключительно вперед, при первом есть колебания назад, соответственно можно предположить, что энергетически предложенное управление так же имеет преимущество перед релейным.

Заключение ко второй главе. Во второй главе добавлено условие периодичности при построении управления вибрационным роботом, и рас-

смотрено два случая ограничения на управление: симметричное ($|\varphi''| \leq \varphi''_{min}$) и одностороннее ($\varphi'' \leq \varphi''_{max}$).

В случае симметричного ограничения произведена численная оптимизация по параметру τ_1 - времени движения корпуса вплоть до участка с нулевым трением. Показано, что средняя скорость робота растет с ростом этого параметра, поэтому оптимальное значение τ_1 соответствует максимально допустимому значению в рамках действующих ограничений. В случае $\tau_1 = \tau_{1opt}$, управление сокращается на один участок управления на фазе покоя, так, что корпус робота начинает движение из фазы покоя с непрерывным управлением $\varphi'' = -\varphi''_{max}$.

Для исследования задачи с односторонним ограничением на угловое ускорение маятника было предложено ввести нижнее ограничение на φ'' как параметр $\varphi'' \geq \varphi''_{min}$. В главе произведена численная оптимизация по этому параметру с целью максимизации средней скорости робота. Показано, что средняя скорость робота растет с ростом абсолютного значения φ''_{min} . Оптимальное значение этого параметра равно максимально возможному в рамках действующих ограничений и определяется таким φ''_{minopt} , что для такого управления $\tau_{1opt} = 0$, то есть робот начинает движение сразу с нулевым трением без участка управления $\varphi'' = \varphi''_{min}$.

Во второй главе также проведено сравнение полученных режимов управления с управлением, рассмотренным в первой главе. Показано, что управление с ограничением вида $|\varphi''| \leq \varphi''_{min}$ и $\tau_1 = \tau_{1opt}$ позволяет увеличить пройденное расстояние за 10 секунд примерно в два раза в сравнении с управлением из первой главы (где вместо периодичности движения накладывается условие симметричности фазы покоя). При дальнейшей оптимизации нижнего ограничения на угловое ускорение, средняя скорость робота растет, так, что режим управления с $\varphi''_{min} = \varphi''_{minopt}$ позволяет увеличить пройденное расстояние еще на 33% в сравнении с предыдущем лучшим результатом для симметричного ограничения на угловое ускорение.

В третьей главе проведен анализ параметров системы и управления, при которых полученный во второй главе режим существует. Определены максимальные и минимальные допустимые значения ограничений на границу углового ускорения при фиксированном значении коэффициента трения и, наоборот, коэффициента сухого трения при фиксированном значении ограничения на угловое ускорение для законов управления, полученных во второй главе.

Исследование показывает допустимость сколь угодно большой константы, ограничивающей угловое ускорение φ''_{max} , и оптимизация с точки зрения максимизации средней скорости робота по этому параметру для обоих

случаев ограничений приводит к его бесконечному росту (чем больше значение ограничения, тем больше средняя скорость).

Минимальное значение ограничения на угловое ускорение определяется из ограничений на фазе покоя. Начало фазы покоя соответствует четвертому уравнению системы (17), обозначим через φ''_{stand} угловое ускорение на начало фазы покоя, которое равно

$$\varphi''_{stand} = \frac{\mu + \varphi_3'^2(\sin \varphi_3 + \mu \cos \varphi_3)}{\cos \varphi_3 - \mu \sin \varphi_3}, \quad (20)$$

Обозначим через φ_{crit} угол, при котором знаменатель (20) равен нулю, т.е. $\cos \varphi_{crit} = \mu \sin \varphi_{crit}$. В главе показано, что чем меньше верхняя граница углового ускорения, тем больше фаза покоя, то есть тем меньше угол φ_3 , с уменьшением которого снижается значение знаменателя, и соответственно растёт абсолютное значение $|\varphi''_{stand}|$.

Для случая симметричного ограничения на угловое ускорение верхняя граница на φ''_{max} , определяется таким значением φ_3 , что $\varphi''_{stand} = -\varphi''_{max}$, то есть во время остановки для обеспечения покоя, маятнику необходимо тормозиться с минимально допустимым ускорением.

Для случая с односторонним ограничением верхняя граница φ''_{max} определяется равенством $\varphi_3 = \varphi_{crit}$.

В главе показано, что для каждого типа ограничений на управление можно брать сколь угодно большой коэффициент трения и движение, определенное рассматриваемыми законами управления, будет реализуемо.

Для обоих типов ограничений на управление показано, что существует граничное минимальное значение коэффициента трения (при фиксированном значении ограничения на угловое ускорение), при котором рассматриваемое движение осуществимо. Его значение определяется так же исходя из условий не выхода за ограничения на фазе покоя, в случае двустороннего ограничения $\varphi''_{stand} \geq -\varphi''_{max}$, в случае одностороннего $\varphi_3 = \varphi_{crit}$. Отметим также, что в случае одностороннего ограничения, если не менять закон управления, может случиться так, что на фазе движения без трения робот будет вынужден поехать назад, до достижения верхней границы на угловое ускорение. В этом случае необходимо скорректировать закон управления так, чтобы участок движения без трения заканчивался раньше.

Заключение к третьей главе. В третьей главе проведен анализ допустимых значений φ''_{max} при фиксированном значении μ и наоборот, границы коэффициента трения μ при фиксированном φ''_{max} , для которых полученный режим реализуем. Показано, что сверху эти параметры не ограничены, а

снизу, наоборот, существует ограничение, определенное условиями на начало фазы покоя.

В четвертой главе диссертации рассматривается управление с симметричным ограничением на угловое ускорение. И в некотором классе движений доказывалась оптимальность полученного закона управления с точки зрения средней скорости робота.

Сначала в главе доказывалась следующая теорема.

Теорема 1. *Для рассматриваемого робота при заданных начальных условиях, при движении корпуса ($x' > 0$) для всех положений маятника $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ максимально возможное ускорение обеспечивает максимум скорости центра масс X'_{cr} .*

Доказательство теоремы 1 состоит из следующих шагов:

1. Сначала в качестве отдельной леммы показано, что управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс, чем $\varphi'' = b$, где $a > b$, a, b — константы.
2. В качестве следствия из предыдущего шага показано также, что управление вида $\varphi'' = a$ даст большую скорость центра масс, чем управление вида $\varphi'' = a$ до некоторого угла φ^* , и $\varphi'' = b$ — после этого угла ($a > b$, a, b — константы).
3. Далее в форме отдельной леммы доказано, что управление вида $\varphi'' = a$ даст большую скорость центра масс, чем управление вида $\varphi'' = b$ до некоторого угла φ^* , и $\varphi'' = a$ — после этого угла ($a > b$, a, b — константы).
4. На основании ранее доказанных пунктов сделано обобщение для доказательства утверждения теоремы 1.

Следствие 1. *Для рассматриваемого робота при заданных начальных условиях, при движении корпуса ($x' > 0$) для всех положений маятника $0 \leq \varphi \leq \pi$ минимально возможное ускорение обеспечивает максимум скорости центра масс X'_{cr} .*

Доказательство следствия для участка движения робота от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ аналогично доказательству самой теоремы 1. Для доказательства используется переход в обратное время, остальные рассуждения такие же.

Рассмотрим случай, когда заданы граничные значения фазовых переменных, и определим управление между ними такое, что скорость центра масс системы максимальна. Сформулируем следующую теорему:

Теорема 2. *Если для рассматриваемого робота:*

1. при положении $\varphi = \varphi_2$ его угловая скорость $\varphi' = \varphi'_2$ и скорость корпуса $x' = x'_2$, такие что $N(\varphi_2, \varphi'_2, \varphi''_{max}) = 0$, $(\cos \varphi_2 + \mu \sin \varphi_2) > 0$ и $\varphi'_2 = \sqrt{2(1 + \cos \varphi_2)} |\csc \varphi_2|$,
2. при положении $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ угловая скорость маятника и скорость корпуса равны φ'_1 и x'_1 , соответственно, такие что $N(\varphi_1, \varphi'_1, -\varphi''_{max}) = 0$, и $\varphi'_1 = \sqrt{2(1 + \cos \varphi_1)} |\csc \varphi_1|$,
3. полагаем, что x'_1 и x'_2 определяются управлением (17),
4. при управлении $\varphi'' = \varphi''_{max}$ для участка движения после угла φ_2 остановка корпуса происходит до вертикального положения маятника $\varphi = 2\pi$,
5. $\varphi''_{max} > \mu$,

то для каждого положения угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ максимальную скорость центра масс корпуса X'_{cr} будет обеспечивать следующее управление:

1. $\varphi'' = \varphi''_{max}$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$
2. $\varphi'' = \frac{\mu + \varphi'^2(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{\cos \varphi - \mu \sin \varphi}$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4$
3. $\varphi'' = \varphi''_{max}$, $\varphi_4 \leq \varphi \leq \varphi_5$
4. $\varphi'' = -\varphi''_{max}$, $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$

Здесь углы переключения между участками управления те же, что и ранее, определенные управлением (17).

Доказательство этой теоремы состоит из четырех шагов:

1. Показано, что на фазе покоя при заданных граничных значениях управление строится из следующего соображения: сначала максимальный разгон маятника, потом - максимальное торможение.
2. Показано, что выбор управления $\varphi'' = \varphi''_{max}$ будет давать наибольшее значение X'_{cr} для всех углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Рассуждения для последнего участка управления ($\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$) будут аналогичны.
3. Далее в качестве отдельной леммы доказано, что при известных начальных условиях фазы покоя и при известном конечном угле и угловой скорости рассматриваемого участка (не обязательно конца фазы покоя) для всех промежуточных углов предложенное управление обеспечивает максимум скорости центра масс.

4. После этого при помощи доказанных пунктов обосновано утверждение теоремы.

Далее в качестве отдельной теоремы в четвертой главе доказывается, что полученное управление оптимально на всем участке движения при заданных начальных условиях по всем фазовым переменным. То есть из условий теоремы 2 убирается точка конца рассматриваемого участка и управление рассматривается за период, это значит, что добавляется пятый участок - движение с нулевым трением.

В главе также при помощи отдельной леммы убирается необходимость знания начальной угловой скорости маятника φ'_2 при $\varphi = \varphi_2$, таким образом расширяя класс движений, для которых полученное управление обеспечивает максимум скорости центра масс системы для каждого положения маятника.

Заключение к четвертой главе В главе показано, что в рассматриваемом классе движений для максимизации средней скорости корпуса требуется реализовать следующую стратегию управления: на фазе движения корпуса при движении маятника вверх требуется максимально тормозить маятник в рамках ограничений задачи, а при прохождении маятником второй половины оборота (т.е. при движении маятника вниз) требуется максимально разгонять маятник.

Кроме того, для случая с симметричным ограничением на угловое ускорение рассматривается вопрос об оптимальности. В работе доказано, что в случае, если начальный угол и скорость корпуса заданы определенным образом, то построенный режим оптимален с точки зрения максимизации средней скорости корпуса робота (или, что тоже самое, центра масс системы).

В **пятой главе** оценена работа, создаваемая двигателем, вращающим маятник робота. Для расчета момента, была получена проекция ускорения маятника в неподвижной системе координат на ось перпендикулярной оси маятника и применен второй закон Ньютона.

$$ml\ddot{\varphi} + m\ddot{x} \cos \varphi = F - mg \sin \varphi \quad (21)$$

Здесь через F обозначена сила, произведенная двигателем. Тогда момент силы F (M_F) будет следующим:

$$M_F = l(ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi + m\ddot{x} \cos \varphi) \quad (22)$$

В главе рассматривалось три метода подсчета работы: Рассмотрим три класса движения, которые определяют расчет проделанной работы:

1. Разгон и торможение маятника обеспечиваются вращающей силой:

$$A_{F1} = \int_t^{t+T} |M_F| * \varphi' dt \quad (23)$$

2. Разгон маятника обеспечивается вращающей силой, в то время как торможение обеспечивается за счет других внешних ресурсов:

$$A_{F2} = \int_t^{t+T} \max(M_F, 0) * \varphi' dt \quad (24)$$

3. При движении происходит рекуперация энергии, то есть ускорение является положительной работой вращающей силы, а торможение - отрицательной. В этом случае работа вращающей силы будет следующей:

$$A_{F3} = \int_t^{t+T} M_F * \varphi' dt \quad (25)$$

Для каждого из рассматриваемых подходов было произведено численное сравнение затрат, деленных на период. Все рассмотренные в главе принципы управления показали преимущество по сравнению с релейным законом, которые упоминался ранее в первой и второй главе.

Особенно это преимущество велико для третьего случая с рекуперацией энергии. Для этого случая в пятой главе аналитически показано равенство работы двигателя и работы силы трения. Такой вывод поясняет полученные численные результаты, поскольку режимы управления, разработанные в рамках диссертации обеспечивают при движении корпуса максимально большой, в рамках ограничений, промежутки, где трение равно нулю. Торможение и разгон корпуса (участки, где работа силы трения не нулевая), наоборот, происходят наискорейшим образом.

Заключение к пятой главе. В пятой главе проведен анализ работы силы, обеспечивающей вращение маятника. Представлено численное сравнение энергетических затрат при различных режимах управления и показано, что предложенные в работе законы управления обеспечивают более энергоэффективное перемещение по сравнению с релейным законом управления.

В **шестой главе** описан метод обеспечения возврата движения на режим движения при рассматриваемых законах управления, в том числе выход на предложенный режим с нулевых начальных условий ($x = 0, x' = 0, \varphi = 0, \varphi' = 0$), а также выход с начальных условий, где $\varphi' > 0$.

Кроме того, в этой главе рассмотрен случай, когда коэффициент трения μ заранее неизвестен, исследуется вопрос об автоадаптации алгоритма управления и определении правильного значения μ .

При численном моделировании в режимах управления (17) и (18) подразумевается, что почти все точки переключения между фазами определяются заранее, исключение составляет момент остановки корпуса робота - переход на фазу покоя. Полагаем, что есть возможность измерять скорость корпуса и, таким образом, отслеживать остановку корпуса для смены режима управления.

Для обеспечения возврата режима при небольших отклонениях была введена коррекция по измерениям, по которой происходит коррекция управления на каждом шаге. Коррекция заключается в следующем: на момент остановки робота снимаются показания угловой скорости и угла положения маятника, зная эти данные и угол, и угловую скорость маятника для начала движения без трения (φ_1 и φ'_1), можно переопределить угол φ^* . Где через φ^* обозначен угол переключения с 4-го участка управления на 5-ый из уравнений (17).

Для управления (18) на каждом обороте маятника переопределяется угол переключения с покоя на движение φ_1 .

Таким образом, при движении с построенным управлением, предполагается наличие коррекции по измерениям φ , φ' и x' , при этом эта коррекция осложнена тем, что в момент остановки необходимо сделать перерасчет угла переключения между участками управления на фазе покоя.

Рассмотрим режим выхода на заданное управление с нуля для случая управления (18).

Первым шагом старта выбирается третье управление из системы (18) - движение с ускорением, обеспечивающим равенство нулю уравнения на конус трения с максимальным значением силы трения (14). Точка переключения на следующий участок определяется достижением ограничения φ''_{max} . Отметим, что эта точка может быть рассчитана заранее и измерения угла для ее определения здесь не требуется. Далее происходит переключение на четвертый участок управления из системы (18) (угловое ускорение максимально), движение по этому управлению происходит вплоть до того момента, пока не будет угловая скорость достаточно большой, чтобы выйти на первый участок управления (18). При этом, на участке движения с максимальным ускорением корпус робота может сначала покоиться, а потом начать движение. Далее происходит переход на управление с нулевым трением ($N = 0$), пока расчетное угловое ускорение не достигнет значения φ''_{max} . Затем режим управления аналогичен второму участку из (18), переключение также определяется остановкой корпуса. После этого цикл повторяется.

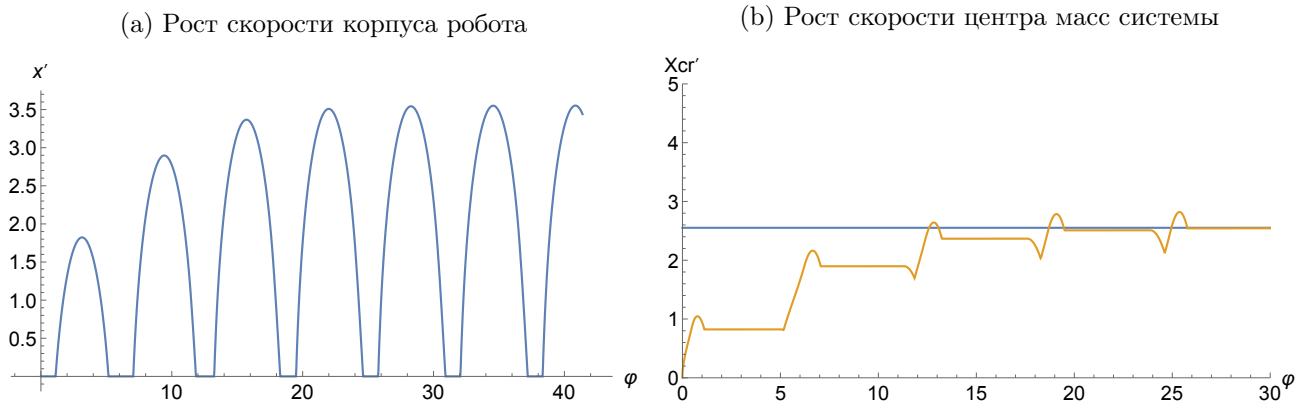


Рис. 3: Зависимость скорости робота от φ

Для осуществления данного управления нужно получать измерения угла и угловой скорости маятника, а так же скорости корпуса для определения момента его остановки.

На графиках а и б рисунка 3 показана зависимость скорости корпуса (а) и скорости центра масс системы (б) от φ для описанного выше управления. Здесь и далее численные параметры при моделировании совпадают с (19), ограничение на угловое ускорение $\varphi''_{max} = 100/49$, а $\mu = 0.5$.

Горизонтальная линия на графике б соответствует скорости центра масс робота на начало участка движения без трения для периодического режима. Видно, что найденное управление через несколько циклов приводит среднюю скорость центра масс к нужной величине.

Оба графика свидетельствуют о том, что такой режим может разогнать систему до периодического режима, найденного ранее.

В шестой главе также показано, что такой режим выхода на построенное управление позволяет начинать движение с любых условий вида $\varphi_0 = 0$, $\varphi'_0 \geq 0$, $x - \forall$, $x'_0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай с переменным или неверно заранее определенным коэффициентом трения μ .

В работе показано, что если можно получать измерения и по x'' в момент остановки робота, то можно разрешить уравнение (13) относительно μ , подставив туда значения всех величин, и получить действительное значение коэффициента трения. После остановки корпуса происходит перестроение управления с учетом полученного μ .

При наличии измерений по x'' во время остановки и измерений необходимых для обеспечения возврата на построенный режим при отклонениях (как было показано выше), при изменении коэффициента трения во время движения, и при наличии отличия между известным и действительным ко-

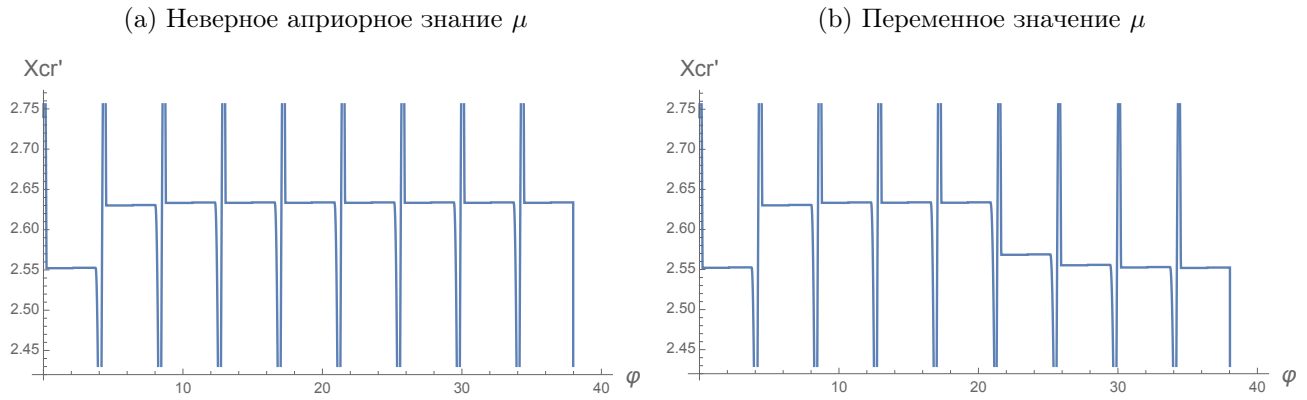


Рис. 4: Зависимость скорости центра масс робота от φ

эффицентом трения, были построены графики зависимости скорости центра масс робота от угла φ (рисунок 4). Все численные параметры такие же, как и ранее.

Начальные условия такие, чтобы обеспечивался периодический режим при априорном значении $\mu = 0.5$. Реальное значение $\mu = 0.9$ (рисунок а). На втором рисунке сначала действительное значение $\mu = 0.9$, а потом μ становится равным 0.5 (то есть действительное значение μ - переменное). Видно, что существующей коррекции по измерениям достаточно для того, чтобы обеспечить переход системы к стационарным режимам движения при различных μ .

Все точки переключения системы отслеживаются во время движения системы и поэтому могут адаптироваться к внешним изменениям. Таким образом, полученное управление позволяет перемещаться по различным поверхностям с сухим трением и допускает начальное ошибочное измерение коэффициента сухого трения μ .

Заключение к шестой главе. В шестой главе представлены алгоритмы для устранения малых отклонений движения системы от предложенного режима, а также алгоритм выхода на полученный режим движения из состояния покоя.

Кроме того показано, что для алгоритма, обеспечивающего выход на построенный режим, можно также не знать правильного значения коэффициента трения μ , в процессе движения алгоритм "определит" действительное значение этого параметра и перестроит управление соответственно.

В **заключении** описаны основные результаты работы.

В **приложении** рассмотрен случай, когда нулевое значение трения на любом участке фазы движения (как в законах управления из первой и второй главы) не представляется возможным. Представлена соответствующая модификация закона управления. Также показано, что при таком управле-

нии существует набор характеристик корпуса робота, при котором робот не будет опрокидываться.

В списке литературы приведены работы, цитируемые в данной диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI:

1. Голицына М.В. Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению // Прикладная математика и механика, 2018, №1, с. 627-636.
2. Голицына М.В. Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018, Т. 19, №1, с. 31-39.
3. Golitsyna M.V, Samsonov V.A. Maximization of Average Velocity of Vibratory Robot (with One Restriction on Acceleration) // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2016, V., 181, p 221-232.

Научная статья, опубликованная в трудах конференции, индексируемых в международных базах Scopus, WoS:

4. Golitsyna M.V Comparison of energy costs for different control laws of a vibratory robot // AIP Conference Proceedings. 2017, V. 1798, I. 1, 10.1063/1.4972679.

Иные публикации:

5. Куликовская М.В. Максимизация средней скорости вибрационного робота // Сборник трудов XXIX Международной научной конференции Математические методы в технике и технологиях ММТТ - 29, 2016, Т.3, с. 130 -135.
6. Куликовская М.В Построение управления вибрационным роботом // статья в сборнике трудов конференции XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 2015, с: 2169-2172.
7. Куликовская М.В. Максимизация средней скорости вибрационного робота при периодическом движении и ограничении на ускорение // Сборник трудов конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ, издательство МГУ (Москва), 2015, с. 138-146.