

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!», 10–11 КЛАССЫ, 2023–2024

OLYMPIAD IN MATHEMATICS «CONQUER THE VOROBYOVY GORY!», GRADE 10–11, 2023–2024

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2025_3_10

Б.А. Будак, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский,
А.И. Козко, В.С. Панфёров, А.Г. Разборов,
И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак,
МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва),
asz1956@yandex.ru

B.A. Budak, D.V. Goryashin, A.S. Zelenskiy,
A.I. Kozko, V.S. Panfyorov, A.G. Razborov,
I.N. Sergeev, I.A. Sheipak,
Lomonosov MSU (Moscow),
asz1956@yandex.ru

Аннотация: приводятся задания, предлагавшиеся учащимся 10–11-х классов на олимпиаде «Покори Воробьёвы Горы!» по математике в 2023/2024 учебном году, с ответами и решениями

Abstract: there are problems offered to students in grades 10–11 at the Olympiad «Conquer the Vorobyovy Gory!» in mathematics in the 2023/2024 academic year, with answers and solutions

Ключевые слова: олимпиада «Покори Воробьёвы Горы!», МГУ, математика

Keywords: olympiad «Conquer the Vorobyovy Gory!», Lomonosov Moscow State University, mathematic

© Б.А. Будак, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский, А.И. Козко,
В.С. Панфёров, А.Г. Разборов, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак 2025

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» в 2023/2024 учебном году состояла из двух этапов. Отборочный этап олимпиады для 11-классников проходил онлайн и длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (4 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени). Отборочный этап для 10-классников длился 24 часа и состоял из 6 задач, часть из которых совпадала с задачами для 11-х классов.

Победители и призёры отборочного этапа приглашались к участию в заключительном этапе (апрель 2024 г.).

Отборочный этап (11 класс). Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Решите неравенство

$$\sqrt{3x+2} - \sqrt{4-x} \leq \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим решениями, находящимися в интервале $[-100, 100]$, при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A , при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

$$A = \left[\frac{(1+3m)\pi}{3}; \frac{(8m+9)\pi}{8} \right], \quad m = -4.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники CHB и AHC равны 3 и 4 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите это значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

5. Петя, спускаясь по движущемуся вниз эскалатору, насчитал a ступенек, а поднимаясь по соседнему движущемуся вверх эскалатору, b ступенек. Известно, что скорость, с которой Петя идёт вверх относительно эскалатора, в k раз меньше скорости, с которой он идёт вниз. Выясните, сколько ступенек насчитает Петя, поднимаясь по стоящему эскалатору, если скорость движения самого эскалатора всегда постоянна.

$$a = 60, \quad b = 36, \quad k = 3.$$

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 - 9ax^2 + (18a^2 + 4)x + a^2 + 32 = 0$$

имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию. В ответе

укажите сумму квадратов найденных значений a , при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

Отборочный этап. Творческое задание

7. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной $2a = 2024$ и противолежащим ей углом $\alpha = \frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округлённую до ближайшего целого площадь этого круга.

8. Петя задумал два целых числа x и y и сообщил их Васе. Вася сложил сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение $x \cdot y$ и частное $\frac{x}{y}$ этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $2m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчётах.

9. Найдите коэффициент при x^{65} в многочлене

$$(x^{200} + x^{199} + x^{198} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

10. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC , причём

$$BD : DA = (\sqrt{3} + 1) : 2.$$

Точка E – середина DC . Найдите минимально возможное значение выражения $AB^2 + BC^2$, если известно, что произведение всех медиан в треугольнике DBE не менее 1700. При необходимости округлите ответ до сотых.

Заключительный этап. Вариант 1 (11 класс)

11. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались

две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только её техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

12. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |2x - 1| - |2x - 3| + 6$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) \leq f(x) + 6 \text{ и } f(x + 2) \geq f(x) + 4.$$

13. Решите уравнение

$36 \cos(x + \cos x) \cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$ и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

14. В остроугольном треугольнике PVG обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников $ОНР$ и $ОНУ$ равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника $ОНG$.

15. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма её координат равна (-2023) . Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

16. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{tg} \alpha] - 1|^x = [\operatorname{tg} \alpha]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь $[t]$ – целая часть числа t .

Вариант 2 (10 класс)

17. На испытаниях беспилотных лета-

тельных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 4 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только её техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

18. На бумажном правильном треугольнике со стороной 45 отметили 2023 красных точки. Можно ли на этом треугольнике разместить два правильных треугольника со стороной 1, не имеющих общих внутренних точек, так, чтобы внутри каждого из них не было ни одной красной точки?

19. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x - 2| - |3x - 4| + 5$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) - 6 \leq f(x) \text{ и } f(x + 2) - 4 \geq f(x).$$

20. В остроугольном треугольнике ABC обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников $АОН$ и $ВОН$ равны 15 и 8 соответственно. Найдите площадь треугольника $СОН$.

21. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} \alpha] - 1|^x = [\operatorname{ctg} \alpha]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь $[t]$ – целая часть числа t .

Ответы и решения

Отборочный этап. Блиц-тур

1. Ответ: 2,67.

Решение. Правая часть неравенства равна

$$\frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Левая часть неравенства – монотонно возрастающая функция, правая часть – константа. При $x = 2$ правая и левая части совпадают. Поэтому неравенство выполнено для всех допустимых значениях x , удовлетворяющих условию $x \leq 2$, то есть для $x \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$. Весь этот отрезок целиком лежит на отрезке $[-100; 100]$. Искомая разность: $2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3} \approx 2,67$.

2. Ответ: $-9,42$.

Решение. Обозначив $\operatorname{tg} x = t$ и используя формулу тангенса суммы, получим:

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{1-t} + \frac{t-1}{1+t} &= t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(t^2+2t+1) - (t^2-2t+1)}{1-t^2} &= t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4t}{1-t^2} &= t. \end{aligned}$$

Отсюда или $t = 0$, или $\frac{4}{1-t^2} = 1 \Leftrightarrow t^2 = -3$ (что невозможно). Значит, $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

В интервал

$\left[\frac{(1-12)\pi}{3}; \frac{(-32+9)\pi}{8}\right] = \left[\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{9\pi}{8} - 4\pi\right]$ попадает одно значение $x = -4\pi + \pi = -3\pi \approx -9,42$.

3. Ответ: 150.

Решение. Обозначим $\angle CAB$ через α . Из подобия треугольников CHB и AHC находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник AHC , а OD (D – точка на стороне CA) – её радиус. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle DAO = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg} \angle DCO = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $AD = 12$, $CD = 8$, $CA = 20$, $BC = 15$, $S_{ABC} = 150$.

Имеются и другие способы решения. Например, из подобия треугольников CBH и CAH следует, что их гипотенузы равны $CB = 3t$, $CA = 4t$. По теореме Пифагора $BA = 5t$. Поскольку $\triangle ABC$ тоже подобен $\triangle CBH$, то радиус вписанной в него окружности равен 5. В подобном треугольнику ABC треугольнике KLM со сторонами 3, 4 и 5 радиус вписанной окружности равен $r = 1$. Следовательно, коэффициент подобия этих треугольников $5 : 1$, а площадь треугольника ABC в 25 раз больше площади треугольника KLM и равна $\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 25 = 150$.

4. Ответ: 3,24.

Решение. Замена $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ сводит систему к следующей:

$$\begin{cases} a^2 - 5b^2 = -1, \\ a + b = 3. \end{cases}$$

Выразив $a = 3 - b$, получим уравнение $2b^2 + 3b - 5 = 0$. Его корни $b = 1$ и $b = -\frac{5}{2}$.

Тогда, соответственно, $a = 2$ и $a = \frac{11}{2}$.

Первый случай: $(a; b) = (2; 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 4, \\ (x-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = y = \pm 1. \end{aligned}$$

В этом случае $x - y = 0$.

Второй случай: $(a, b) = \left(\frac{11}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. В этом случае

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{11}{2}, \\ xy = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = \frac{1}{2}, \\ (x-y)^2 = \frac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ |x-y| = \sqrt{\frac{21}{2}}. \end{cases}$$

Система порождает совокупность четырёх систем, каждая из которых имеет одно решение. Максимальное значение выражения $x - y$ равно $\sqrt{\frac{21}{2}} \approx 3,24$, и оно больше, чем аналогичное выражение, полученное в первом случае.

5. Ответ: 90.

Решение. Пусть x — отношение скорости эскалатора к скорости Пети при спуске вниз. Тогда за время, за которое Петя проходит одну ступеньку, у эскалатора «уедет вниз» x ступенек. Следовательно, если Петя пройдёт a ступенек, у эскалатора «уедет вниз» ax ступенек. Если бы эскалатор не двигался, Петя бы прошёл все $a + ax$ ступенек.

Аналогично, при движении вверх Петя пройдёт b ступенек, а у эскалатора «уедет вверх» $b k x$ ступенек. Если бы эскалатор не двигался, Петя бы прошёл все $b + b k x$ ступенек.

Получаем уравнение $a + ax = b + b k x$, откуда $x = \frac{a-b}{bk-a}$ (допустимые параметры удовлетворяют условиям $b < a < bk$).

Всего ступенек получается

$$a + a \cdot \frac{a-b}{bk-a} = \frac{ab(k-1)}{bk-a}.$$

При заданных числовых данных получаем $\frac{60 \cdot 36 \cdot 2}{36 \cdot 3 - 60} = 90$ (ступенек).

6. Ответ: 80.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 — корни,

образующие арифметическую прогрессию, то их сумма, с одной стороны, равна $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$, а с другой стороны, по теореме Виета их сумма равна $9a$. Значит, корнем уравнения является $x_2 = 3a$. Подставляя его в уравнение, получим $a^2 + 12a + 32 = 0$, откуда $a = -4$ или $a = -8$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при каждом из этих a уравнение имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Поэтому ответ:

$$(-4)^2 + (-8)^2 = 16 + 64 = 80.$$

Отборочный этап.

Творческое задание

7. Ответ: 3 217 443.

Решение. Если круг радиуса R содержит треугольник со стороной $2a$, то $2R \geq 2a$, то есть $R \geq a$. Если круг описан около треугольника, то по теореме синусов его радиус равен $\frac{a}{\sin \alpha} \geq a$.

Осталось заметить, что круг с диаметром, совпадающим с известной стороной, равной $2a$, содержит третью вершину треугольника (то есть и весь треугольник целиком), так как $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Поэтому радиус круга равен a и его площадь есть πa^2 . При $2a = 2024$ получаем $\pi \cdot 1012^2 \approx 3\,217\,443$.

8. Ответ: 23.

Решение. По условию

$$(x+y) + (x-y) + xy + \frac{x}{y} = 1500.$$

Поэтому x делится на y (иначе сумма не будет целым числом) и

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 1500 \Leftrightarrow \frac{x}{y}(y+1)^2 = 1500.$$

Обозначим $\frac{x}{y} = n$, тогда $n(y+1)^2 = 1500$.

Так как $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$, то возможны следующие восемь вариантов:

$$y + 1 = \pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10.$$

С учётом того, что $y \neq 0$, их остаётся семь. Каждому значению y соответствует ровно одно значение x . Поэтому имеется семь пар (x, y) , удовлетворяющих условию.

Значит, вероятность того, что Гена угадает числа Пети, равна $\frac{1}{7}$. Поэтому $m = 1$, $n = 7$, $2m + 3n = 23$.

9. Ответ: 2211.

Решение. Умножив многочлен $(x^{200} + x^{199} + \dots + x + 1)$ дважды сам на себя, получим сумму одночленов вида $x^m x^n x^k$, где $m, n, k \in [0; 200]$. Это означает, что коэффициент при x^{65} равен числу решений уравнения $m + n + k = 65$ в целых неотрицательных числах.

Это число равно количеству способов разложить 65 шаров по трём ящикам (некоторые ящики могут оказаться пустыми). Рассмотрим ряд из 67 объектов: 65 шаров и 2 перегородок, расположенных в случайном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует определённому способу расположения шаров в ящиках: в первом ящике находятся шары, расположенные слева от первой перегородки, во втором ящике — шары, расположенные между первой и второй перегородками, в третьем — шары, расположенные справа от второй перегородки (шаров может не быть между некоторыми перегородками). Следовательно, количество способов расположить шары в коробках равно числу различных рядов по 65 шаров и 2 перегородок, то есть равно

$$C_{67}^2 = \frac{67 \cdot 66}{2} = 2211.$$

10. Ответ: 1139,52.

Решение. Обозначим $c = |BD|$, $a = |BC|$, $d = |BE|$, $e = |DE|$, медианы в треугольнике DBE обозначим через m_c , m_d , m_e . Тогда из условия вытекает, что $AB = \sqrt{3}c$. Используя формулу для медиан

ны BE треугольника DBC , получаем равенство $a^2 + c^2 = 2(d^2 + e^2)$.

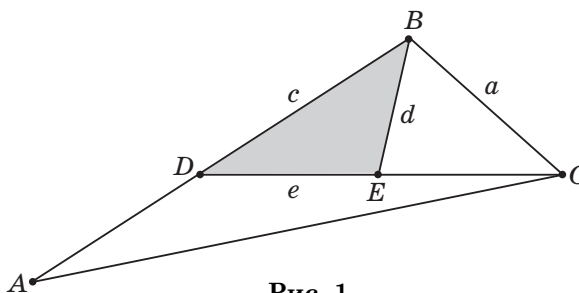


Рис. 1

Поскольку сумма квадратов трёх сторон треугольника в $\frac{4}{3}$ раз больше суммы квадратов трёх медиан, с помощью неравенства о средних получаем:

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 3c^2 + a^2 = 2c^2 + (a^2 + c^2) = \\ &= 2c^2 + 2(e^2 + d^2) = \\ &= 2(c^2 + e^2 + d^2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}(m_c^2 + m_d^2 + m_e^2) \geq 8(m_c \cdot m_d \cdot m_e)^{\frac{2}{3}}.$$

Знак равенства здесь достигается в случае равенства трёх медиан, то есть, если $\triangle DBE$ равносторонний.

Так как, по условию, $m_c \cdot m_d \cdot m_e \geq 1700$, то $\min(AB^2 + BC^2) = 8 \cdot (1700)^{\frac{2}{3}} \approx 1139,52$.

Заключительный этап.

Вариант 1

11. Ответ: модель Альфа, на 50 м.

Решение. Решим задачу в общем виде. В условии заданы: u м/с — скорость ветра; модель Альфа продержалась в воздухе на t секунд меньше модели Бета; модель Альфа пролетела на l метров дальше.

Пусть v_1 и v_2 — скорости при безветренной погоде моделей Альфа и Бета, соответственно (в м/с), t_1 и t_2 — время (в секундах), которое первая и вторая модели, соответственно, продержались в воздухе.

Тогда при встречном ветре $(v_1 - u)t_1 -$

дальность полета модели Альфа, $(v_2 - u)t_2$ – дальность полёта модели Бета. По условию:

$$t = t_2 - t_1, l = (v_1 - u)t_1 - (v_2 - u)t_2 = v_1 t_1 - v_2 t_2 + ut.$$

При безветренной погоде разность между дальностью полёта первой и второй моделей равна $x = v_1 t_1 - v_2 t_2 = l - ut$.

Таким образом, $x > 0$, если $l > ut$; $x < 0$, если $l < ut$; $x = 0$, если $l = ut$.

При $u = 3$, $t = 150$ и $l = 500$ получаем $x = 500 - 450 = 50 > 0$. Значит, модель Альфа пролетит дальше на 50 метров.

12. Ответ: 4052.

Решение. Отметим, что $f(0) = 4$, $f(1) = 6$, $f(2) = 8$. По условию для целых значений x , с одной стороны,

$$f(x + 6) \leq f(x + 3) + 6 \leq f(x) + 12,$$

а с другой стороны,

$$f(x + 6) \geq f(x + 4) + 4 \geq f(x + 2) + 8 \geq f(x) + 12.$$

Поэтому $f(x + 6) = f(x) + 12$ и, более того, все неравенства выше обращаются в равенства. Поэтому $f(x + 3) = f(x) + 6$, $f(x + 2) = f(x) + 4$ и $f(x + 1) = f(x) + 2$.

Учитывая, что $f(0) = 4$, получаем, что при целых значениях x искомая функция – это функция $f(x) = 4 + 2x$. Значит, $f(2024) = 4 + 2024 \cdot 2 = 4052$.

13. Ответ: $x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Сумма корней: $4\pi - \arccos \frac{\pi}{6}$.

Решение. Пользуясь формулами преобразования произведения в сумму, получаем

$$\cos 2x + \cos(2 \cos x) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}.$$

Пусть $t = \cos x$, тогда левая часть уравнения равна $f(t) = 2t^2 - 1 + \cos 2t$.

Функция $f(t)$ возрастает на $[0; 1]$ (так как $f(t) = 2(2t - \sin 2t) > 0$ при $t > 0$) и является чётной, причём $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$.

Следовательно, корнями уравнения $f(t) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$ на отрезке $[-1; 1]$ являются числа $t = \pm \frac{\pi}{6}$. Возвращаясь к переменной

x , находим $x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Так как

$$\frac{\pi}{4} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} < \arccos \frac{\pi}{6} < \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

то на указанный отрезок попадают корни

$$\pi - \arccos \frac{\pi}{6}, \quad \pi + \arccos \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad 2\pi - \arccos \frac{\pi}{6}.$$

Их сумма равна $4\pi - \arccos \frac{\pi}{6}$.

14. Ответ: 8 или 2.

Решение. В точке H пересекаются три высоты треугольника. Так как O – центр описанной окружности, то в точке O пересекаются серединные перпендикуляры треугольника. Пусть точка M – середина стороны PV , тогда GM – медиана. Пусть T – точка пересечения медианы и прямой OH .

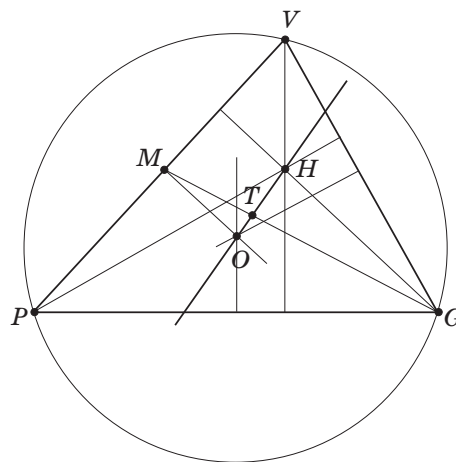


Рис. 2

Треугольники MOT и GHT подобны (следует из параллельности прямых MO и HG , которые обе перпендикулярны прямой PV). Прямая OH – прямая Эйлера. Она проходит через точку пересечения

медиан. Следовательно, T – точка пересечения медиан и $GT : TM = 2 : 1$.

Поэтому площадь $\triangle OHG$ в 2 раза больше площади $\triangle OHM$.

Так как M – середина PV , то

$$S_{\triangle OHM} = \frac{S_{\triangle OHP} + S_{\triangle OHV}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OHG} = S_{\triangle OHP} + S_{\triangle OHV}.$$

Но здесь ошибкой был бы вывод о том, что, значит, $S_{\triangle OHG} = 5 + 3 = 8$. Дело в том, что выше доказано, что одна из этих трёх площадей является суммой двух других. Какая именно, зависит от рисунка, который мы сделаем. Важно, где прямая OH пересекает стороны треугольника.

Если треугольник PVG правильный, то точки O и H совпадают и указанные в условии задачи три площади вырождаются (это здесь невозможно, так как дано, что площади равны 3 и 5).

Если прямая OH проходит через любую вершину треугольника, то тогда одна из трёх площадей равна 0, а две другие – ненулевые, но равны между собой (тоже не наш случай).

Если же прямая OH пересекает две стороны (рассмотренный выше случай), то мы доказали, что одна из этих трёх площадей (в одном случае это $\triangle OHG$, в другом – $\triangle OHP$, в третьем – $\triangle OHV$) является суммой двух других.

Поэтому получаем либо $5 + 3 = x$ (то есть $x = 8$), либо $3 + x = 5$ (то есть $x = 2$), либо $5 + x = 3$ (что невозможно).

15. Ответ: $2\sqrt{4046} = 34\sqrt{14}$.

Решение. Из условия вытекает, что $q \neq 0$. Если обозначить $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$,

$C(0; q)$, $D(x; y)$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Далее, $|DB|^2 = |DC|^2 \Leftrightarrow (x - x_2)^2 + y^2 = x^2 + (y - q)^2 \Leftrightarrow 2qy = q^2 + 2xx_2 - x_2^2$. Так как $2x = x_1 + x_2$, то $2qy = q^2 + x_1x_2$. Поэтому с учётом теоремы Виета:

$$x = -\frac{p}{2}, \quad y = \frac{q+1}{2}.$$

Тогда из условия задачи имеем уравнение $q - p = 2 \cdot (-2023) - 1 = -4047$. По формуле корней квадратного уравнения находим

$$|AB| = |x_2 - x_1| = \sqrt{D} = \sqrt{p^2 - 4q},$$

откуда следует, что

$$|AB|^2 = p^2 - 4q = p^2 - 4p + 4 \cdot 4047 = (p - 2)^2 + 4 \cdot 4046 \geq 4 \cdot 4046.$$

Таким образом, наименьшее возможное значение $|AB| = 2\sqrt{4046} = 34\sqrt{14}$, и это значение достигается при $p = 2$, $q = -4045$.

16. Ответ: $a \in [-\pi/4 + \pi n; \pi n) \cup [\arctg 5 + \pi n; \arctg 6 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Положим $b = [\operatorname{tg} a]$. Тогда уравнение принимает вид $(|2b - 1|)^x = b^2 + 2$; $b \in \mathbf{Z}$. Нужно найти все целочисленные значения b , при которых существует рациональное решение x .

При $b = 0$ решений нет.

Рассмотрим вначале случай $b > 0$, то есть $b \in \mathbf{N}$. Уравнение примет вид:

$$(2b - 1)^x = b^2 + 2.$$

Поскольку при любом натуральном b выполнено неравенство $b^2 + 2 > 2b - 1 \geq 1$, можем считать, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Значит, числа $b^2 + 2$ и $2b - 1$ имеют одни и те же простые делители.

Пусть p – общий простой делитель этих чисел, тогда

$$\begin{cases} b^2 + 2 = pN, \\ 2b - 1 = pM, \end{cases}$$

где N и M – натуральные.

Умножим первое уравнение на 4, а второе на $2b + 1$. Затем, сложив их, получим:

$$\begin{aligned} 9 &= 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = \\ &= (4N - (2b + 1)M)p. \end{aligned}$$

Значит, $(4N - (2b + 1)M)$ – натуральное, а p – делитель 9, то есть $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} b^2 + 2 = 3^m, \\ 2b - 1 = 3^k, \end{cases}$$

где m и k – натуральные и $m > k$.

Так как

$$\begin{aligned} 9 &= 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = \\ &= 4 \cdot 3^m - (3^k + 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2), \end{aligned}$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2$ не делится на 3, то $k = 2$.

Тогда $m = 3$, $b = 5$, $x = \frac{3}{2}$.

Для отрицательных b решение проводится почти аналогично. Положим $c = -b$. Тогда исходное уравнение будет записываться в виде: $(2c + 1)^x = c^2 + 2$, $c \in \mathbf{N}$.

Случай $c = 1$ очевиден, поскольку решение $x = 1$. Пусть $c \in \mathbf{N}$, $c \geq 2$. Аналогично предыдущему показывается, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Опять предположив, что p – общий простой делитель этих чисел, получим

$$\begin{cases} c^2 + 2 = pN, \\ 2c + 1 = pM, \end{cases}$$

и сделаем вывод, что $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} c^2 + 2 = 3^m, \\ 2c + 1 = 3^k, \end{cases}$$

где m и k – натуральные и $m > k$.

Так как

$$\begin{aligned} 9 &= 4(c^2 + 2) - (2c - 1)(2c + 1) = \\ &= 4 \cdot 3^m - (3^k - 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2), \end{aligned}$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2$ не делится на 3, то $k = 2$, а $4 \cdot 3^{m-2} - 3^2 + 2 = 1$. Тогда $4 \cdot 3^{m-2} = 8$, но последнее уравнение не имеет натуральных корней.

Поэтому все решения описываются уравнениями: $[\operatorname{tg} a] = -1$ и $[\operatorname{tg} a] = 5$, решив которые приходим к ответу.

Вариант 2

17. Ответ: модель Б-2, на 100м.

См. решение задачи №11 для 11 класса.

18. Ответ: можно.

Решение. Проведа $3 \cdot 44 = 132$ прямых, параллельных сторонам исходного

треугольника, разобьём бумажный треугольник на $45^2 = 2025$ правильных треугольников со стороной 1. Так как отмечено 2023 точки, то существует, как минимум, два треугольника, внутри которых точек нет (принцип Дирихле).

19. Ответ: 4051.

См. решение задачи №12 для 11 класса.

20. Ответ: 23 или 7.

См. решение задачи №14 для 11 класса.

21. Ответ:

$$a \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \cup$$

$$\cup (\operatorname{arctg} 6 + \pi n; \operatorname{arctg} 5 + \pi n], \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

См. решение задачи №16 для 11 класса.

Задачи и решения данной олимпиады прошлых лет печатались в журнале ранее ([1]–[5]). Все задачи олимпиад 2013–2018 гг. опубликованы в книге [6].

Список источников

1. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!», 10–11 классы, 2022–2023 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2024. – № 3. С. 9–19.

2. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!», 10–11 классы, 2021–2022 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2023. – № 3. С. 3–12.

3. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2020–2021 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2022. – № 2. С. 17–25.

4. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2019–2020 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2021. – № 1. С. 28–39.

5. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2018–2019 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2020. – № 4. С. 11–23.

6. Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике (2013–2018) / А.С. Зеленский и др. – М.: МЦНМО, 2019. – 192 с.

Статья поступила в редакцию

11.07.2024.

Принята к публикации

21.01.2025.