

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ-КОНКУРСА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

16–19 октября 2023 г.

Под редакцией
профессора В. А. Самсонова



Издательство Московского университета
2024

УДК 531/534(082)
ББК 22.2я431
Т78

Рецензент:

доктор физико-математических наук, профессор *А. Н. Голубятников*

Для популяризации результатов исследований участников Конференции сборник публикуется в электронном виде в сети Интернет до научного рецензирования, технического редактирования и печатного издания. Печатная версия сборника может отличаться от электронной по содержанию, в том числе нумерацией страниц.

Труды конференции-конкурса молодых ученых, 16–19 октября 2023 г. / под редакцией В. А. Самсонова. — Москва : Издательство Московского университета, 2024. — 135, [1] с. : ил. (рис., сх., граф., диагр., фот., табл.). — Электронное издание сетевого распространения.

ISBN 978-5-19-012124-7 (e-book)

DOI: 10.55959/MSU012124-7-2024

Конференция-конкурс молодых ученых Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова — традиционная ежегодная конференция, проводимая в связи с объявлением конкурса стипендий ректора МГУ и дирекции Института механики МГУ для молодых ученых и в целях более активного привлечения молодых ученых к научным исследованиям.

УДК 531/534(082)

ББК 22.2я431

© Коллектив авторов, 2024

© Научно-исследовательский институт механики
МГУ имени М. В. Ломоносова, 2024

© Издательство Московского университета, 2024

ISBN 978-5-19-012124-7 (e-book)

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Предисловие.....	5
2. <i>Чернова А.А.</i> Режимы вытеснения жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести (Диплом I степени конференции-конкурса).....	11
3. <i>Гарбуз М.А.</i> Режимы падения тяжёлой пластины в сопротивляющейся среде (Диплом II степени конференции-конкурса)	19
4. <i>Косьянчук В.В.</i> Моделирование течения разреженного газа через систему быстро вращающихся турбин (Диплом II степени конференции-конкурса).....	31
5. <i>Голуб А.П.</i> Исследование движения трёхзвенного аэродинамического маятника (Диплом III степени конференции-конкурса).....	37
6. <i>Меркулов Д.И.</i> Взаимодействие анизотропных намагничивающихся тел в магнитном поле (Диплом III степени конференции-конкурса).....	42
7. <i>Гулин В.В.</i> Исследование интегральных кривых и фазового портрета нелинейной модели сдвигового течения тиксотропных сред, учитывающей взаимное влияние эволюции структуры и процесса деформирования.....	50
8. <i>Загайнов И.А.</i> Отработка методики засева сверхзвукового потока различными типами трассеров <i>river</i> -системы.....	59
9. <i>Киселёв Н.А.</i> Аналогия Рейнольдса в сжимаемом турбулентном пограничном слое с градиентом давления в сверхзвуковом щелевом канале	64
10. <i>Королькова О.П.</i> Исследование свойств определяющих соотношений для материалов с зависящими от вида напряженного состояния свойствами	72
11. <i>Куприй Р.М.</i> Оценка эффективности <i>csr</i> -подобных форматов хранения матриц при решении систем линейных алгебраических уравнений.....	82
12. <i>Лобачёва Д.М.</i> Определение волокон минераловатных тепло-	

изоляционных плит.....	90
13. <i>Петрушов А.А.</i> Эволюционный алгоритм в задаче настройки параметров конфигурации методов решения систем линейных алгебраических уравнений.....	98
14. <i>Резанова А.С.</i> Моделирование простейших виртуальных вспомогательных устройств для ходьбы с нагрузкой	104
15. <i>Рябинина А.Ю.</i> Экспериментальное исследование вдавливания клина в пластический материал.....	112
16. <i>Сытченко И.М.</i> Режимы вытеснения жидкости из пласта в поле силы тяжести в осесимметричной постановке.....	119
17. <i>Храмов Д.А.</i> Динамика нерастяжимой нити переменной длины с грузом на конце.....	127

ПРЕДИСЛОВИЕ

16–19 октября 2022 г. в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова прошла традиционная научная конференция-конкурс молодых ученых Института (возраст участников до 33 лет включительно). Кроме сотрудников Института на конференции с докладами выступили аспиранты и студенты механико-математического факультета Московского государственного университета.

Для подведения итогов конференции-конкурса было образовано жюри в составе:

Научн. рук. института механики МГУ,
академик РАН В.А. Левин,
Председатель,
Академик РАН А.Г. Куликовский,
Гл. научн. сотр., дфмн В.А. Самсонов,
Гл. научн. сотр., дфмн А.М. Формальский,
Вед. научн. сотр., чл.-корр. РАН А.А. Афанасьев,
зам. председателя,
Вед. научн. сотр., дфмн И.Г. Брыкина,
Вед. научн. сотр., дфмн С.Г. Пшеничнов,
Вед. научн. сотр., кфмн П.Ю. Георгиевский,
Вед. научн. сотр., кфмн М.А. Зубин,
Вед. научн. сотр., кфмн Б.И. Краснопольский,
Вед. научн. сотр., кфмн О.Г. Сутырин,
Вед. научн. сотр., кфмн П.В. Чистяков,
Ст. научн. сотр., кфмн И.А. Брюханов,
Ст. научн. сотр., дтн Е.А. Коровайцева,
Ст. научн. сотр., кфмн Д.А. Пелевина,
Ст. научн. сотр., кфмн Ф.А. Семин,
Ст. научн. сотр., ктн В.В. Терауд.

Программа
Конференции-конкурса молодых ученых
Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова

16 октября 2023 г.

11⁰⁰ – 13²⁰

1. *Гречко С.С.* Исследование отложения соли в призабойной зоне скважины при нагнетании углекислого газа в водонасыщенный пласт
2. *Осталец Р.Е.* Взаимодействие двух вихрей в вязкой жидкости
3. *Чернова А.А.* Режимы вытеснения жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести
4. *Киселёв Н.А.* Аналогия Рейнольдса в сжимаемом турбулентном пограничном слое с градиентом давления в сверхзвуковом щелевом канале
5. *Сыпченко И.М.* Режимы вытеснения жидкости из пласта в поле силы тяжести в осесимметричной постановке
6. *Резанова А.С.* Моделирование простейших виртуальных вспомогательных устройств для ходьбы с нагрузкой
7. *Шарова О.А.* Взаимодействие сферического магнита с объемом магнитной жидкости на горизонтальной плоскости

13²⁰ – 14⁰⁰ – Перерыв

14⁰⁰ – 15⁴⁰

1. *Гареев Л.Р.* Немодалный механизм нарастания возмущений в осесимметричной ламинарной струе
2. *Гулин В.В.* Исследование интегральных кривых и фазового портрета нелинейной модели сдвигового течения тиксотропных сред, учитывающей взаимное влияние эволюции структуры и процесса деформирования
3. *Королькова О.П.* Исследование свойств определяющих соотношений для материалов с зависящими от вида напряженного состояния свойствами
4. *Храмов Д.А.* Динамика нерастяжимой нити переменной длины с грузом на конце
5. *Лобачева Д.М.* Определение эмиссии волокон минераловатных теплоизоляционных плит
6. *Старцев Н.И.* Явление удвоения периода в пульсирующем турбулентном течении

19 октября 2022 г.

11⁰⁰ – 13⁰⁰

1. *Захаров С.А.* Свободный газовый разряд и моделирование шаровой молнии и образования радио пузыря
2. *Куприй Р.М.* Исследование эффективности CSR-подобных форматов хранения матриц при решении систем линейных алгебраических уравнений
3. *Петрушов А.А.* Эволюционный алгоритм в задаче настройки параметров конфигурации методов решения систем линейных алгебраических уравнений
4. *Рябинина А.Ю.* Экспериментальное исследование вдавливания клина в пластический материал
5. *Смирнов К.В.* Гидравлический прыжок в поле массовой силы в продольном направлении

6. *Косьянчук В.В.* Моделирование течения разреженного газа через систему быстро вращающихся турбин

13⁰⁰ – 14⁰⁰ – Перерыв

14⁰⁰ – 16²⁰

1. *Гарбуз М.А.* Режимы падения пластины в идеальной жидкости
2. *Голованов С.А.* Преодоление препятствий гусеничным роботом
3. *Голуб А.П.* Исследование движения трёхзвенного аэродинамического маятника
4. *Меркулов Д.И.* Взаимодействие анизотропных намагничивающихся тел в магнитном поле
5. *Загайнов И.А.* Исследование поля скорости сверхзвукового воздушного потока методом PIV
6. *Андреева А.И.* Режимы вытеснения из анизотропного пласта при закачке жидкости через совершенную скважину
7. *Экстер Н.М.* Моделирование поведения силовозбудителя с рабочим телом из сплава с памятью формы и линейным телом смещения

По итогам устных выступлений жюри конференции-конкурса предложило Ученому совету Института кандидатуры для награждения дипломами лауреатов конкурса, а также для выдвижения на стипендии МГУ для молодых преподавателей и ученых и стипендий Института механики МГУ для молодых ученых и специалистов на 2023 г.

Дипломанты конференции-конкурса

Диплом I степени	<i>Чернова А.А.</i>
Диплом II степени	<i>Гарбуз М.А.</i> <i>Смирнов К.В.</i> <i>Косьянчук В.В.</i>
Диплом III степени	<i>Голуб А.П.</i> <i>Меркулов Д.И.</i>

Лауреаты конкурса лучших работ аспирантов

Диплом I степени	<i>Чернова А.А.</i>
Диплом II степени	<i>Гарбуз М.А.</i> <i>Смирнов К.В.</i>
Диплом III степени	<i>Гулин В.В.</i>

Лауреаты конкурса лучших работ студентов

Диплом I степени	<i>Старцев Н.И.</i>
Диплом II степени	<i>Петрушов</i> <i>А.А.</i>
Диплом II степени	<i>Загайнов И.А.</i>

***Дипломом
за яркую экспериментальную работу Жюри конкурса
отметило доклад***

Рябининой А.Ю.

Совет молодых ученых Института механики
Афанасьев Андрей Александрович, тел. (495) 939-57-67
E-mail: *afanasyev@imec.msu.ru*

РЕЖИМЫ ВЫТЕСНЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

А.А. Чернова

Аннотация. В работе рассмотрена задача двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в анизотропной пористой среде, находящейся в поле силы тяжести. Показано, что существует четыре режима, соответствующих качественно различным течениям. Проведено сравнение их эффективности в терминах коэффициента извлечения жидкости из пласта и коэффициента его охвата вытеснением. Исследовано влияние капиллярного давления на эффективность вытеснения.

Введение. Разработка углеводородных месторождений предполагает закачку в пласт жидкостей и газов с целью поддержания пластового давления и вытеснения нефти от нагнетательных к добывающим скважинам [1,2]. Однако, неоднородное строение пластов, которое в ряде случаев можно охарактеризовать анизотропной проницаемостью, снижает эффективность вытеснения нефти. Часто абсолютная проницаемость в горизонтальном направлении значительно больше проницаемости в вертикальном направлении. Это приводит к снижению коэффициента охвата пласта вытеснением, т.е. отношения объема породы, охваченной вытеснением, ко всему объему нефтесодержащей породы. Нагнетаемая в пласт жидкость (или газ) может прорываться к добывающим скважинам по отдельным высокопроницаемым пропласткам, оставляя невытесненным значительный объем нефти.

Гравитационное расслоение жидкостей также может уменьшать коэффициент нефтеотдачи [3–7]. Так как вода обычно характеризуется более высоким значением плотности, чем нефть, то при заводнении нефтяного пласта вода может опускаться к его подошве, оставляя невытесненной нефть у кровли пласта. При закачке газа

реализуется противоположная ситуация. Как более легкая по сравнению с нефтью фаза газ поднимается к кровле пласта и вдоль нее прорывается к добывающим скважинам, оставляя неохваченными вытеснением области у подошвы пласта. Отмеченные гидродинамические эффекты в поле силы тяжести осложняются влиянием других механизмов переноса жидкостей, прежде всего связанных с капиллярной пропиткой пористой среды [8]. Влияние капиллярного давления на эффективность вытеснения неоднозначно. С одной стороны капиллярное давление может приводить к повышению охвата пласта вытеснением, а с другой стороны может приводить к нежелательным последствиям, связанным с «размытием» фронтов вытеснения и ускоренным продвижением вытесняющей жидкости к добывающим скважинам.

В данной работе представлена классификация и описание режимов, которые могут возникать при влиянии вышеупомянутых процессов при вытеснении несмешивающихся жидкостей в анизотропном пласте.

1. Постановка задачи. Рассматривается двумерная задача изотермической фильтрации в области Φ , $(x, z) \in [0, L] \times [0, H]$, описывающей срез проницаемого пласта (Рис. 1). Здесь x – горизонтальная координата, направленная вдоль пласта, z – вертикальная координата, направленная вниз, L – протяженность рассматриваемого сектора пласта, H – его толщина. Область Φ характеризуется однородным распределением пористости ϕ и однородным, но анизотропным распределением проницаемости $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_x, k_z\}$. Пористая среда насыщена несжимаемой жидкостью d , которая имеет плотность ρ_d . В начальный момент времени $t = 0$ пласт находится в условиях гидростатического равновесия, а давление p линейно зависит от глубины z

$$p_d = p_0 + \rho_d g z, s_d = 1 \text{ при } t = 0$$

где p_d – давление на уровне $z = 0$, s_d – насыщенность жидкости d , а g – ускорение свободного падения. Условие $s_d = 1$ означает, что поровое пространство полностью насыщено жидкостью d , а другие жидкости отсутствуют. Все границы $x = 0, L$ и $z = 0, H$ области Φ непроницаемые.

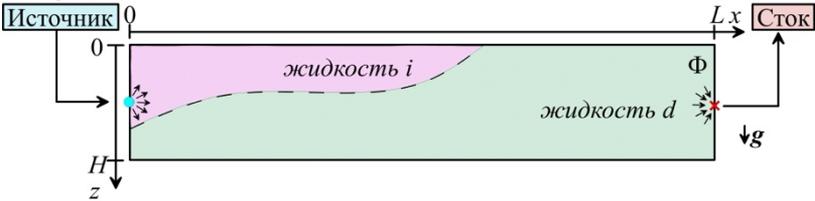


Рис.1 Схема течения.

При $x = 0$, $z = H/2$ расположен точечный источник, через который в область Φ закачивается другая вытесняющая несжимаемая жидкость i заданной плотности ρ_i . Закачка начинается в момент времени $t = 0$ и происходит с постоянным расходом Q . Одновременно с источником включается сток, расположенный у противоположной границы области при $x = L$, $z = H/2$. Через сток может отбираться как вытесняемая, так и вытесняющая жидкость. Суммарный расход стока для обеих жидкостей равен Q , т.е. по абсолютной величине он равен расходу источника.

Если $\rho_i < \rho_d$, то закачиваемая жидкость из-за силы Архимеда стремится подняться к границе $z = 0$. В противоположном случае ($\rho_i > \rho_d$) более тяжелая вытесняющая жидкость i стремится под действием силы тяжести опуститься к границе $z = H$. В данной работе будет рассмотрен случай закачки более легкой жидкости, т.е. случай $\rho_i < \rho_d$.

2. Режимы вытеснения и сравнение их эффективности. Рассмотрим следующие безразмерные параметры [9]:

$$\Gamma = \frac{Q\mu_d}{k_z(\rho_d - \rho_i)gL}, A = \frac{L}{H} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}, \Pi = \frac{p_{c,max}}{(\rho_d - \rho_i)gH}$$

где μ_d – вязкость вытесняемой жидкости, k_x, k_z – компонента тензора проницаемости по направлению x, z , соответственно, $p_{c,max}$ – максимальное капиллярное давление.

Малые значения критерия подобия Γ соответствуют режиму вытеснения, в котором при прочих равных условиях преобладает вертикальное направление течения. При $\Gamma \gg 1$ происходит быстрое гравитационное расслоение жидкостей, а затем уже в условиях стратификации (локального гравитационного равновесия) происходит течение в направлении оси x от источника к стоку. Если $\Gamma \sim 1$, то имеем переходный режим с одинаковым временем течения жидкости между вертикальными и горизонтальными направлениями.

Параметр подобия A характеризует направление возмущения давления от источника. Случай $A \ll 1$ (или $A \gg 1$) соответствует высокой проницаемости в направлении оси x (или z). Следовательно, возмущения давления быстро переносятся в данном направлении.

Число Π характеризует протяженность зоны пропитки в капиллярно-гравитационном равновесии жидкостей d и i . При $\Pi \ll 1$ переходная зона мала, что приводит к четкой границе поверхности раздела фаз в равновесии. Выше этой границы пористая среда насыщена легкой жидкостью, а ниже – тяжелой. При увеличении Π протяженность переходной зоны растет.

Рассмотрим влияние критериев подобия Γ и A на режимы вытеснения жидкости d при малом влиянии капиллярного давления ($\Pi \ll 1$). Проведено численное моделирование поставленной задачи фильтрации с помощью пакета программ MUFITS [10]. В результате выделены четыре качественно различных режима, показанных на Рис. 2. Данные графики построены в безразмерных

координатах $x^* = x/L$, $z^* = z/H$. При $\Gamma, A \gg 1$ реализуется режим одномерного течения от источника к стоку (режим 1D), соответствующий вытеснению из пласта малой мощности H . При уменьшении Γ возрастает влияние силы Архимеда и при $A \gg 1$, $\Gamma \ll 1$ реализуется режим вытеснения с образованием ярко выраженного шлейфа жидкости i около угла $(0;0)$ в области Φ (режим PF). Случай $A \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ соответствует вытеснению из анизотропного пласта, характеризующегося высокой проницаемостью в направлении x и низкой проницаемостью в направлении z , а также малому влиянию силы Архимеда (режим AR). В этом случае вытесняющая жидкость быстро прорывается от источника к стоку вдоль линии $z = 1/2$. При $\Gamma, A \ll 1$ реализуется режим вытеснения в условиях ярко выраженной стратификации жидкостей (режим SD). Малое значение Γ приводит к быстрому перемещению жидкости от источника к кровле пласта ($z = 0$), а малое значение A способствует накоплению жидкости i у кровли в виде горизонтального слоя, толщина которого растет по мере закачки вытесняемой жидкости.

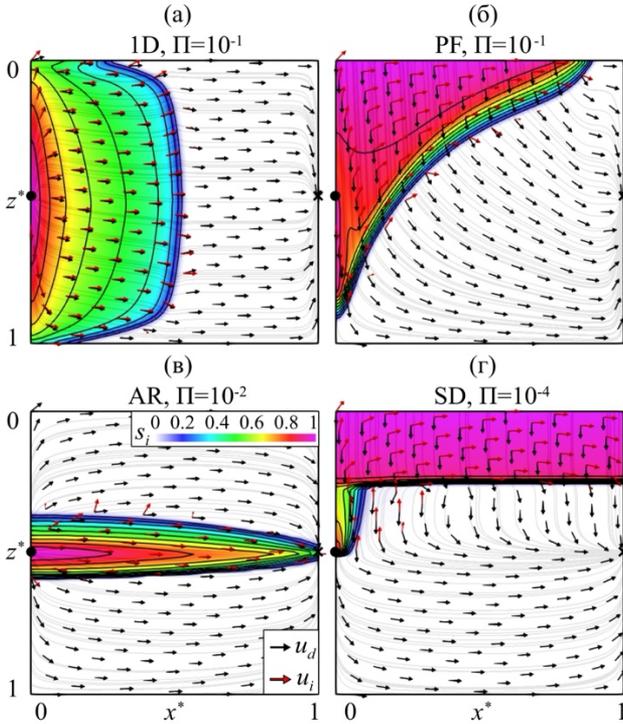


Рис.2. Режимы вытеснения при малом влиянии капиллярного давления. Цветом показана насыщенность закачиваемой жидкости, черные стрелки указывают направление течения вытесняемой жидкости, а красные – вытесняющей.

3. Влияние капиллярного давления. Выше было описано четыре режима, зависящих от параметров Γ, A . Рассмотрим влияние капиллярного давления на каждый из представленных режимов. На Рис.2 представлены результаты расчетов при $\Pi \ll 1$. Стоит отметить, что здесь четко видна граница раздела вытесняемой и вытесняющей жидкостей. В данном разделе нарушается это условие и рассматриваются случаи $\Pi \geq 1$, в которых граница раздела жидкостей «размазывается».

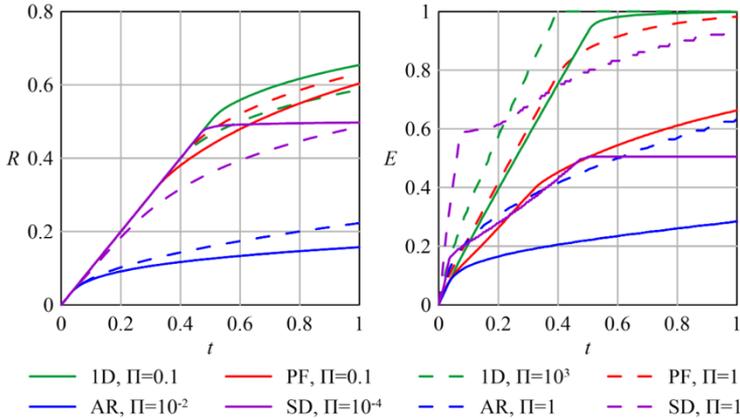


Рис.3. Коэффициент извлечения жидкости d и коэффициент охвата пласта вытеснением.

На Рис.3 сплошными линиями показаны графики коэффициента извлечения жидкости d (R) и коэффициента охвата пласта вытеснением (E) при $\Pi \ll 1$, пунктирными линиями – при $\Pi \geq 1$. При малом влиянии капиллярного давления максимальное значение R и E достигается в режиме 1D, так как в этом случае пласт наиболее равномерно охвачен вытеснением. Наименьшее значение – в режиме AR, что объясняется быстрым прорывом вытесняемой жидкости к источнику вдоль прямой $z = 1/2$ и вытеснением жидкости только из узкой области.

При увеличении влияния капиллярного давления граница между жидкостями «размазывается» и этот эффект неоднозначно влияет на эффективность вытеснения. При увеличении влияния капиллярного давления коэффициент охвата пласта увеличивается для всех режимов, а коэффициент извлечения жидкости d увеличивается в режимах PF и AR и уменьшается в режимах 1D и SD.

Заключение. Представлено влияние трёх параметров подобия, характеризующих вытеснение несжимаемой жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести при фиксированном положении источника и стока.

Показаны четыре качественно различных режима вытеснения, обусловленные влиянием силы Архимеда и анизотропного распределения проницаемости. Исследовано влияние капиллярного давления на коэффициенты эффективности вытеснения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-71-10051.

Список использованных источников

1. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений. М.: Недра, 1986. 332с.
2. Willhite G.P. Waterflooding, Vol.3. Richardson, Texas: Textbook Series, SPE, 1986.
3. Green D.W., Willhite G.P. Enhanced Oil Recovery, Second Edition. Textbook Series, SPE, 2018.
4. Lake L.W. Enhanced Oil Recovery. Prentice Hall. 1989.
5. Bermudez L., Johns R.T., Parakh H. Parametric investigation of WAG floods above the MME // SPE Journal. 2007. V. 12. P. 224–234.
6. Чернова А.А., Афанасьев А.А. Влияние гравитационного расслоения фаз на оптимальные режимы водогазового воздействия на нефтяные пласты // Изв. РАН МЖГ. 2022. № 5. С. 51–61.
7. Афанасьев А.А., Султанова Т.В. Исследование нестационарного двухмерного вытеснения в пористой среде в авторемодельной постановке // Изв. РАН МЖГ. 2017. №4. С. 62–72.
8. Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of Linear Waterfloods // J Pet Technol. 1953. V. 5. P. 139–148.
9. Чернова А.А., Афанасьев А.А. Режимы вытеснения жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести // Изв. РАН МЖГ. 2023. № 6. С. 95–109.
10. MUFITS. Reservoir Simulation Software. [Электронный ресурс]. 2013–2024. URL: <http://www.mufits.org/> (дата обращения: 21.02.2024).

РЕЖИМЫ ПАДЕНИЯ ТЯЖЁЛОЙ ПЛАСТИНЫ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

М.А. Гарбуз

Аннотация. В работе рассматривается феноменологическая модель падения тяжёлой прямоугольной пластины в вязкой жидкости, предложенная В.В. Козловым [1]. Движение описывается уравнениями Кирхгофа для идеальной жидкости, в которые введены дополнительные члены, квадратичные по скорости и соответствующие трению.

Изучены режимы авторотаций, при которых пластина совершает полные обороты вокруг боковой оси, и её центр масс движется в среднем по прямой. Предложено усиление известных ранее необходимых условий возникновения таких режимов. Найдены новые периодические движения пластины, соответствующие падению с незатухающими колебаниями из стороны в сторону. Определена область параметров, при которых движение пластины теряет периодичность.

Введение. Задача о падении тонкой пластины в сопротивляющейся среде издавна привлекает внимание ведущих специалистов и по праву занимает особое место среди фундаментальных проблем общей механики. За прошедшее столетие сложилось широкое разнообразие подходов к моделированию такого падения.

Как известно из механики сплошных сред, движение тела в вязкой жидкости следует моделировать с помощью уравнений Навье-Стокса с условием прилипания на границе. С точки зрения современных вычислительных средств, это серьёзная задача, если описывать её во всех деталях. Тем не менее, некоторые авторы брались за её решение. Так в работах [2-6] были предложены различные упрощения, позволяющие численно исследовать траектории тонкой пластины.

Для проведения качественного анализа уместно использовать более простую феноменологическую модель, ухватывающую основные особенности поведения пластины. Выбор такой модели естественно связать с экспериментом. Одно из первых наблюдений, отражённых в научной литературе, принадлежит Д.К. Максвеллу. В работе [7] он описал режим авторотации падающей по воздуху прямоугольной пластины, на которой пластина совершает самоподдерживающиеся вращения в одном направлении вокруг боковой оси, а её центр масс движется в среднем по прямой под некоторым углом к горизонту. Такой режим движения не является единственным. В работе [8] были проведены броски пластины из разных положений без начального толчка. Показано, что для одной и той же пластины в зависимости от начальных условий возможны два режима: вышеуказанные авторотации и флаттер, при котором пластина совершает незатухающие угловые колебания из стороны в сторону. Отдельному экспериментальному исследованию авторотаций пластин различной массы и формы посвящены работы [9-11]. В статье [12] рассмотрено падение однородного диска в воде. Оказывается, наряду с воздухом, в жидкости также возникают режимы флаттера и авторотаций. Стоит заметить, что в действительности не всегда падение плоского тела в воздухе становится периодическим. Работа [13] указывает, что в некоторых случаях возможен хаос.

Великие отечественные механики – Стеклов [14], Ляпунов [15], Чаплыгин [16], – для описания свободного падения тела в среде использовали в своих работах модель идеальной невязкой жидкости, предложенную Кирхгофом [17]. Движение твёрдого тела описывается системой ОДУ. Воздействие идеальной жидкости на тело проявляется в так называемом эффекте присоединённых масс – тело в жидкости по-разному реагирует на приложенные к нему нагрузки, в зависимости от ориентации.

Как было показано в работе [18,19], в идеальной жидкости движение тонкой пластины для почти всех начальных условий сводится к падению «плашмя» с убывающей угловой амплитудой и неограниченно возрастающей частотой. Поэтому такая модель не описывает режимы флаттера и авторотаций.

Позднее В.В. Козлов предложил новую феноменологическую модель [1], в которой наряду с эффектом присоединённых масс учитывается вязкое трение, задаваемое функцией Релея. Такое обобщение модели сопротивляющейся среды позволило В.В. Козлову установить аналитически наличие устойчивых режимов авторотаций. Оказывается, что помимо режимов авторотаций, такая модель охватывает и другие известные из практики типы установившихся движений. Представляет интерес проследить эволюцию возможных режимов движения, в зависимости от параметров модели.

1. Описание системы. Следуя работе [1], рассмотрим свободное падение тяжёлой прямоугольной пластины в безграничном объеме жидкости, покоящейся на бесконечности. Движение в жидкости описывается уравнениями Кирхгофа [16,17], дополненные слагаемыми, соответствующими вязкому трению.

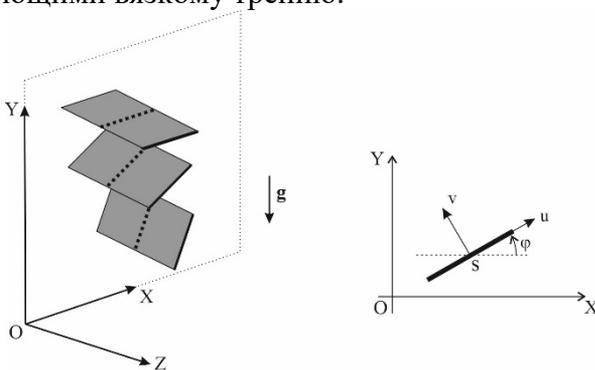


Рис. 1. Положение пластины.

Среди класса возможных движений пластины ограничимся рассмотрением лишь тех, при которых одна из плоскостей симметрии пластины занимает постоянное вертикальное положение (см. рис. 1). В этой плоскости введём декартовы координаты OXY так, что ось OY направлена вертикально вверх. Пусть x, y — координаты точки S , являющейся центром масс пластины, φ — угол между плоскостью пластины и осью OX , отсчитываемый против часовой стрелки.

Кинетическую энергию системы «тело+жидкость» можно записать в следующей форме:

$$T = (a_1 u^2 + a_2 v^2 + b \dot{\varphi}^2) / 2,$$

где a_1 — масса пластины, $a_1 - a_2$ — присоединённая масса пластины при движении по нормали, b — момент инерции пластины относительно горизонтальной оси, проходящей через её центр, с учётом эффекта присоединённых масс.

Помимо силы тяжести на пластину действуют силы вязкого трения со стороны жидкости. Предполагая, что движение происходит с малой скоростью, зададим силы вязкого трения диссипативной функцией Релея:

$$\mu l \left((c_1 u^2 + c_2 v^2) + c_3 \mu l^3 \dot{\varphi}^2 \right) / 2.$$

Здесь μ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, l — длина меньшей стороны пластины, c_k — безразмерные коэффициенты, причём $c_2 > c_1$, т.к. пластина испытывает наибольшее сопротивление при движении в направлении нормали.

Пусть P — вес тела в жидкости. Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} a_1 \dot{u} + c_1 \mu l u - a_2 v \dot{\varphi} = -P \sin \varphi, \\ a_2 \dot{v} + c_2 \mu l v + a_1 u \dot{\varphi} = -P \cos \varphi, \\ b \ddot{\varphi} + c_3 \mu l^3 \dot{\varphi} + (a_2 - a_1) u v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Скорость точки S относительно неподвижной системы, очевидно, находится из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \varphi - v \sin \varphi, \\ \dot{y} = u \sin \varphi + v \cos \varphi. \end{cases}$$

Перечисленные уравнения, дополненные начальными условиями, полностью определяют движение пластины в жидкости.

2. Стационарное падение. Опишем неподвижные точки системы (1). Положим $\dot{\varphi} = 0, \varphi = \varphi_0$. Тогда уравнения (1) принимают следующую форму:

$$\begin{cases} a_1 \dot{u} + c_1 \mu l u = -P \sin \varphi_0, \\ a_2 \dot{v} + c_2 \mu l v = -P \cos \varphi_0, \\ (a_2 - a_1) u v = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если $a_2 \neq a_1$, то из последнего уравнения (2) заключаем, что

$$u \equiv 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0; v(t) = -\frac{P}{c_2 l \mu} + \frac{P + c_2 l v_0 \mu}{c_2 l \mu} e^{-\frac{c_2 l \mu}{a_2} t}, \quad (3)$$

либо

$$v \equiv 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pi / 2; u(t) = -\frac{P}{c_1 l \mu} + \frac{P + c_1 l u_0 \mu}{c_1 l \mu} e^{-\frac{c_1 l \mu}{a_1} t}. \quad (4)$$

Эти режимы отвечают вертикальному падению тела узкой и широкой стороной вниз, соответственно, при которых скорость центра масс монотонно возрастает до предельных значений. Отметим, что в случае равенства коэффициентов a_2 и a_1 (например, если рассматриваемое тело имеет форму цилиндра) возможен дополнительный режим «планирования», при котором тело без вращения опускается вниз под постоянным углом к горизонту.

В работе [1] показано, что падение «ребром» (4) неустойчиво при любых положительных a_1, c_1, l, μ . Режима «плашмя» (3) может быть как устойчивым, так и

неустойчивым. При дальнейшем изложении нас будет интересовать условие потери устойчивости режима «плашмя» (3), которое можно сформулировать следующим образом:

$$\left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_3 l^2}{b} \right) \left(1 + \frac{c_1 c_2^2 c_3 l^6 \mu^4}{(a_2 - a_1) a_2 P^2} \right) = \frac{c_2}{a_2}. \quad (5)$$

Помимо этого, в [1] было указано необходимое условие возникновения режимов авторотации: $c_2/c_1 > a_2/a_1$. Вероятно, это условие можно усилить. Для того чтобы это продемонстрировать, проведём численное интегрирование системы.

3. Параметрический анализ. Зафиксируем параметры следующим образом: $l=1$ м, $m=1$ кг, $a_1=m$, $a_2=3m$, $b=0.5 ml^2$, $\mu = 0.01779 m^2 / c$, $c_2=112$, $c_3=4.5$. Обоснование такого выбора можно найти, например в [20,21]. Численно опишем динамику системы при изменении коэффициента c_1 .

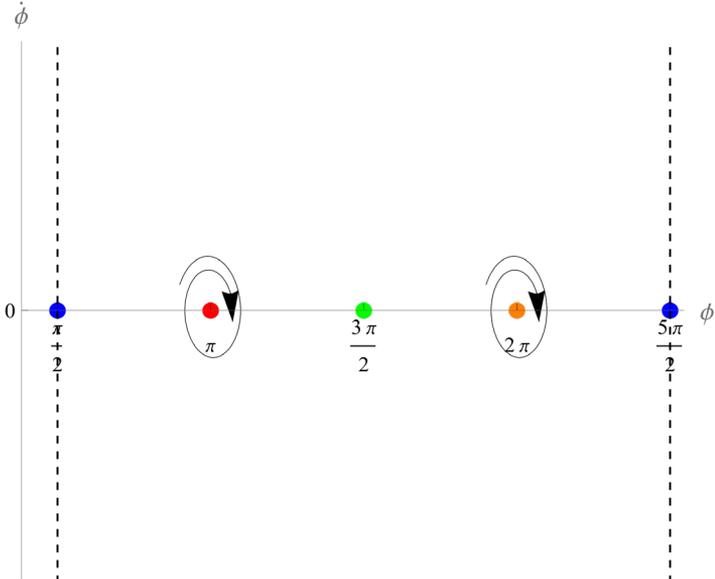


Рис.2. Падение пластины плашмя.

Так как все функции, стоящие в правой части системы (1) 2π -периодические, фазовое пространство является цилиндрическим. Будем строить проекции фазовых траекторий системы на развёртку фазового цилиндра - плоскости $(\dot{\varphi}, \varphi)$.

Пусть сперва отношение коэффициентов трения пластины при движении вдоль продольной и нормальной оси равно отношению соответствующих эффективных масс: $c_1 / c_2 = a_1 / a_2$ (проекция фазового портрета указан на рис. 2). Особые точки $(\varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0), (2\pi, 0)$ являются устойчивыми фокусами. Движение пластинки при любых начальных условиях, за исключением положений $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) = (\pi/2, 0), (3\pi/2, 0), (5\pi/2, 0)$, сводится к вертикальному падению «плашмя».

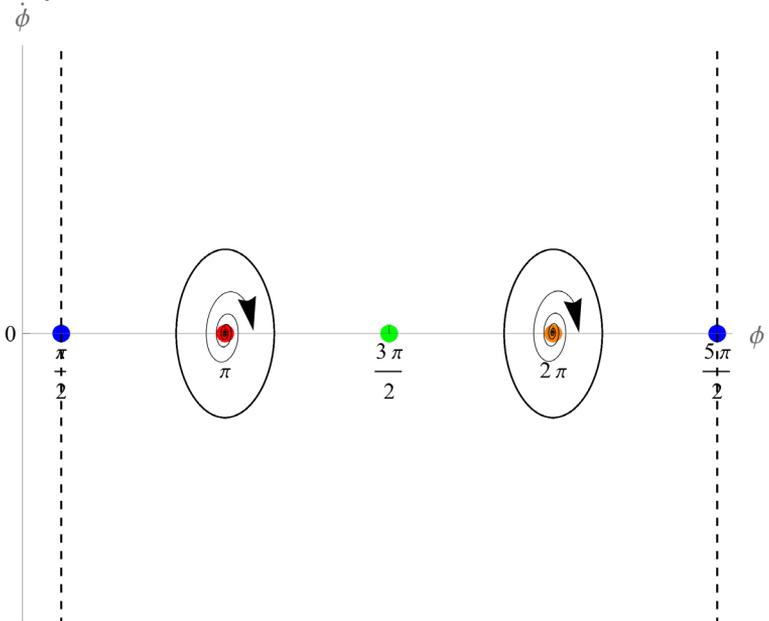
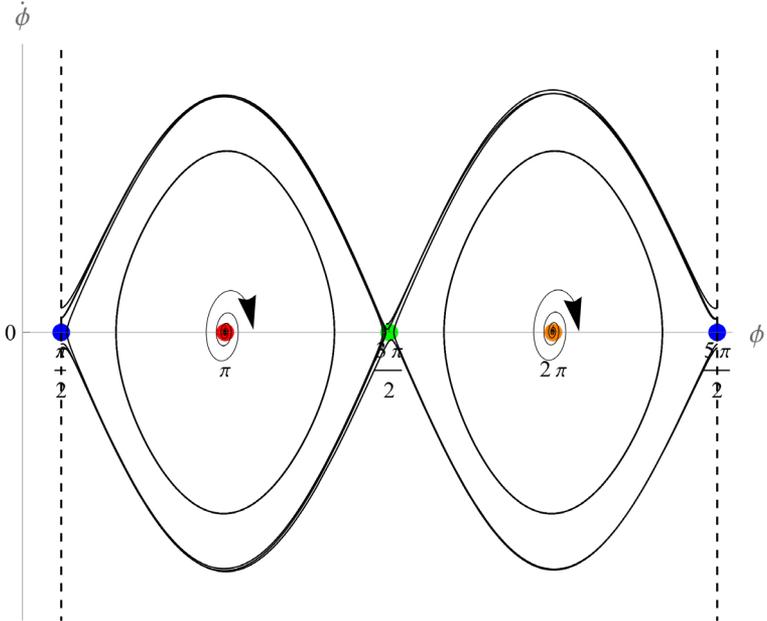


Рис.3. Притягивающий цикл: колебания пластины из стороны в сторону с постоянной угловой амплитудой.

После потери устойчивости (момент $c_1 = c_1^* \approx 27.52$ определяется алгебраически из уравнения (5)) вокруг неподвижных точек рождаются притягивающие циклы, целиком расположенные на фазовом цилиндре (рис 3). Они отвечают периодическим колебаниям пластины из стороны в сторону с постоянной амплитудой.

Уменьшение коэффициента c_1 приводит к росту амплитуды колебаний пластины. При этом на притягивающих режимах увеличивается и общая скорость центра пластины.



*Рис.4. Появление неперiodического режима.
 $c_1=25.1$.*

Имеет место критическое значение $c_1 \approx 25.10762$, при котором на фазовом цилиндре появляется новое притягивающее семейство траекторий (рис. 4). Циклы, отвечающие флаттеру, сохраняются, однако есть область начальных условий, при которых вращение пластины имеет неперiodический характер. Уменьшение c_1

приводит к сужению области вокруг режимов автоколебаний, в которой расположено новое семейство притягивающих траекторий. При $c_1 = 25$ это семейство становится периодическим: пластина поочерёдно совершает полный оборот в обе стороны.

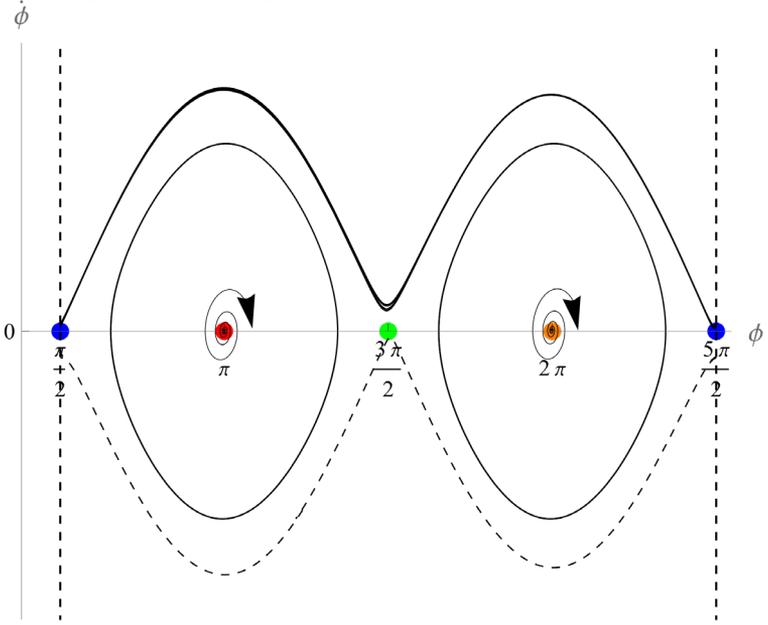


Рис.5. Квазипериодические режимы авторотаций.
 $c_1=24.96$.

Далее при $c_1 < 24.9693$ рождаются квазипериодические режимы авторотаций, опоясывающие фазовый цилиндр (рис. 5). Пластина совершает полные обороты с постоянной в среднем угловой скоростью, направление которой зависит от начальных условий.

Значение $c_1 \approx 24.397$ является граничным, при котором сохраняются режимы флаттера. Дальнейшее уменьшение коэффициента приводит к разрушению этих режимов (см. рис. 6), после чего на фазовой плоскости остаются только режимы авторотации. По всей видимости, это происходит из-за того, что циклы сливаются с

множеством траекторий, которое разделяет области притяжения авторотаций и флаттера.

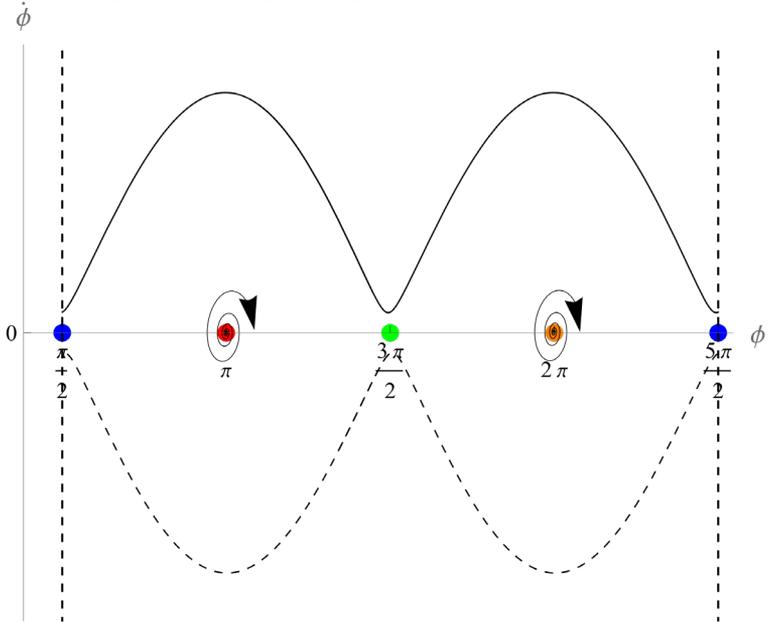


Рис. 6. Режимы авторотаций. $c_1=24.39$.

Численный анализ показывает, что режимы авторотации появляются после потери устойчивости режимов падения «плашмя». Таким образом, ранее известное условие рождений авторотации целесообразно заменить на более сильное (5).

Заключение. Проведено численное интегрирование модели, описывающее движение тонкой пластины в жидкости при учёте сил вязкого трения. Получена новая оценка для необходимых условий рождения авторотационных режимов. Показано, что рассматриваемая модель помимо известных режимов описывает автоколебания и неперриодические движения при определённом выборе параметров.

Список использованных источников

1. Козлов В. В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 1990, №1, с. 79–86.
2. Andersen A., et al. Analysis of transitions between fluttering, tumbling and steady descent of falling cards // J. Fluid Mech., 2005
3. Z. Wang, et al. Falling paper: Navier-Stokes solutions, model of fluid forces, and center of mass elevation//Phys. Rev. E., 2004
4. U. Pesavento, et al. Unsteady aerodynamics of fluttering and tumbling plates // J. Fluid Mech., 2005
5. D. Finn, Falling paper and flying business cards // SIAM News, V.40, №4, 2007
6. K. Xu, et al. Numerical study of the unsteady aerodynamics of freely falling plates and tumbling plates // Communications in Computational Physics, 2008
7. Д.К. Максвелл, «О частном случае спуска тяжёлого тела в сопротивляющейся среде» Cambridge and Dublin Math. Journ., 1854
8. С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ, О двух режимах срывного обтекания пластины, ДАН СССР, 1973, т. 213, №4, 804–807
9. Dupleich P. Rotation in free fall of rectangular wings of elongated shape. 1949
10. Huang W. et al. Experimental study of a freely falling plate with an inhomogeneous mass distribution // Phys. Rev. E., 2013, vol. 88, no. 5, 053008, 7 pp.
11. Mahadevan L et al. Tumbling cards // Phys. Fluids, 1999, V.11, №1, pp. 1–3.
12. Heisinger L., et al. Coins falling in water // J. Fluid Mech., 2014, V742, pp. 243–253.
13. Field S.B., at al. Chaotic dynamics of falling disks // Nature, 1997, V.388, №6639, pp. 252–254
14. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьков. матем. общ. 1893, с. 263–264.

15. Ляпунов А.М. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьков. матем. общ. 1895. Т.4. с. 81-85

16. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933

17. Kirghoff G. *Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit* // *J. Reine und Angewan. Math.* 1870

18. Козлов В.В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1989. № 5. С. 10–17.

19. Козлов В.В. О положительных интегралах динамических систем с полутора степенями свободы // Матем. заметки, 1989. Т. 45. № 4. С. 46–52.

20. Ламб Г. Гидромеханика. — М.: Гостехиздат, 1947. — Т. 1. — С. 204–205.

21. Кузнецов С. П. Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики // *Нелинейная динам.*, 2015, Т. 11, №1, с. 3–49.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ БЫСТРО ВРАЩАЮ- ЩИХСЯ ТУРБИН

В.В. Косьянчук

Аннотация. В данной работе с использованием метода прямого статистического моделирования Монте-Карло исследовано течение разреженного газа через систему быстро вращающихся лопаток (турбин) в широком диапазоне чисел Кнудсена в плоской постановке. Система представляет собой упрощенную версию турбомолекулярного насоса (ТБН) и может увеличивать или уменьшать поток газа в зависимости от направления вращения турбин и ориентации лопаток. Показано, что в случае смеси газов работа ТБН приводит к эффекту разделения смеси. Исследовано влияние параметров ТБН на эффективность газоразделения.

Введение. Турбомолекулярный насос, представляющий собой множество последовательно соединенных вращающихся турбин, получил практическое применение относительно давно [1] и активно используется для создания высокого и сверхвысокого вакуума. При этом известно [2], что эффективность насоса сильно зависит от молекулярной массы рабочего газа. Предыдущие работы автора показывают, что при течении разреженной смеси газов в подобных устройствах может наблюдаться эффект разделения смеси [3-5]. Возможность использования ТБН для разделения газовых смесей исследуется в данной работе.

1. Постановка задачи. Изучается течение гелий-аргоновой смеси газов через систему турбин, подвижных (роторов) и неподвижных (статоров), в плоской постановке (см. Рис. 1). Турбина представляет собой ряд наклонных пластин, толщины h и длины L , расположенных на расстоянии H друг от друга ($h = H/10$). При этом роторы движутся с постоянной

скоростью u в направлении оси x . Углы наклона роторов и статоров обозначаются α и β , соответственно. Расстояние между роторами и статорами по вертикали взято равным H . Количество секции N определяет количество роторов (N) и статоров ($N - 1$). На вход (верхняя граница) подается эквимольная смесь (концентрация $\chi_0 = 0.5$) при давлении p_0 и температуре $T_0 = 300$ К. Исследуется коэффициент разделения смеси s , определяемый как отношение числовых потоков компонент на выходе $-J_{Ar}/J_{He}$, в установившемся режиме течения.

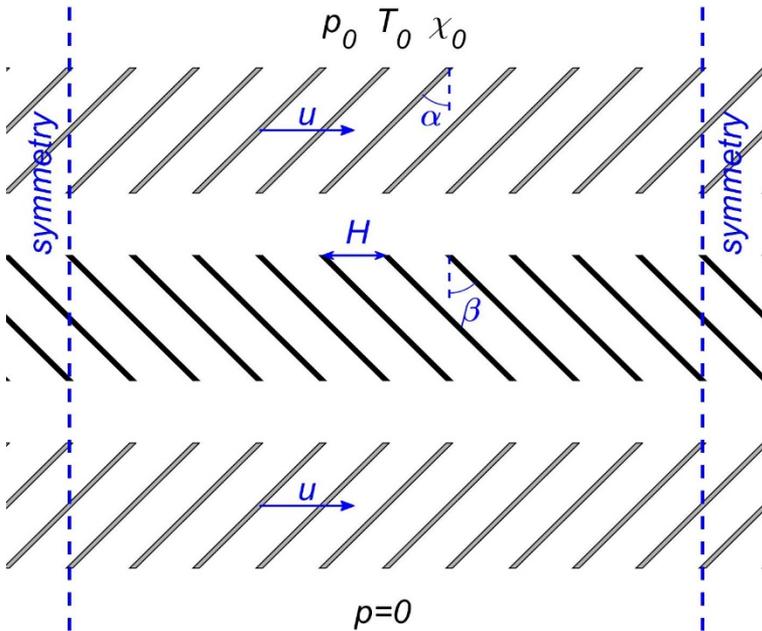


Рис. 1. Постановка задачи. Пластины роторы обозначены серым цветом, статоры – черным.

2. Метод решения. Для моделирования была использована модификация классического метода динамики разреженного газа – метода прямого

статистического моделирования Монте-Карло (DSMC) [6]. Столкновение молекул газа происходит по модели твердых сфер (Hard Spheres/HS) с параметрами $d_{He} = 2.33 \times 10^{-10}$ м, $d_{Ar} = 4.17 \times 10^{-10}$ м. Выбор пар молекул для столкновения основан на классическом подходе без счетчика времени (No-Time-Counter/NTC). Взаимодействие молекул газа с поверхностью осуществляется в рамках ядра рассеяния Максвелла с полной аккомодацией энергии и импульса. В случае столкновения с движущейся границей молекуле придается дополнительная скорость в направлении оси x , соответствующая скорости вращения лопаток u . При моделировании использовалась равномерная квадратная сетка с размером ячеек $d = H/30$. Шаг по времени брался равным $\Delta t = 0.5 \cdot d/c$, где $c = \sqrt{2kT_0/m}$ (k – константа Больцмана, $m = (m_{He} + m_{Ar})/2$ – молекулярная масса смеси на входе). Количество частиц на ячейку (при давлении p_0) была выбрано равным 200.

На верхней границе (Рис. 1) поддерживаются фиксированные макропараметры $p_0, T_0, \chi_0 = 0.5$. Нижняя граница считается вакуумированной ($p = 0$). Левая и правая границы связаны периодическим условием.

3. Результаты. Задача определяется следующими 5 основными безразмерными параметрами:

$$Kn, \frac{u}{c}, \frac{L}{H}, \operatorname{tg} \alpha, N$$

где Kn – безразмерное число Кнудсена, характеризующее степень разреженности газа, и выражается через вязкость смеси и другие параметры по формуле

$$Kn = \frac{\mu c}{h p_0}$$

Для начала был рассмотрен случай свободномолекулярного течения ($Kn = 10$) и одной ступени устройства ($N = 1$). Результаты представлены на Рис. 2. Сразу

можно отметить, что вращение турбины приводит к увеличению коэффициента разделения (на рисунках s_0 – коэффициент разделения в отсутствии лопаток за счет естественной диффузии). При этом максимальная эффективность растет с увеличением угла наклона лопаток α . Однако видно, что наибольший эффект достигается, когда отношение скорости вращения турбин к характерной тепловой скорости молекул примерно равно тангенсу угла наклона лопаток. Таким образом, при больших углах наклона потребуются скорости вращения сильно выше скорости звука, что труднодостижимо на практике. Также можно отметить, что эффект разделения усиливается с увеличением длины лопаток, что не наблюдается для ТБН [2] (эффективность насоса не растет с увеличением длины лопаток).

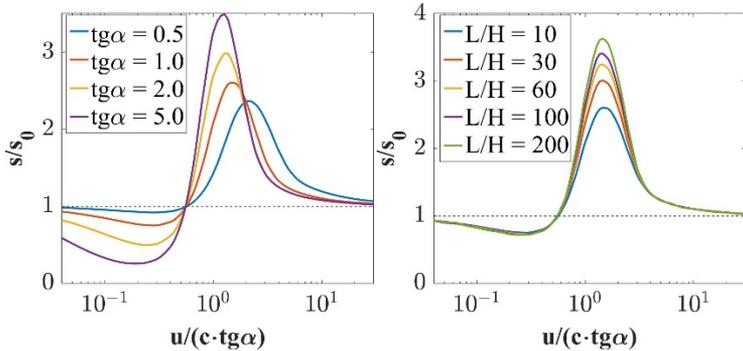


Рис. 2. Результаты расчетов для одной ступени в свободномолекулярном режиме. Зависимость коэффициента разделения s от скорости вращения лопаток и при $L/H = 10$ и различных углах наклона лопаток (слева), а также при угле наклона 45 градусов и различных L/H .

Результаты моделирования для большего числа секций и различных режимов по числу Kn (см. Табл. 1) свидетельствуют о том, что увеличение количества секций не приводит к усилению разделения, и даже наоборот – ослабляет эффект. При этом эффективность разделения снижается с числом Кнудсена (более плотный режим) так же, как и коэффициент разделения естественной диффузии s_0 , но эффект усиления разделения ($s/s_0 > 1$) присутствует во всех режимах по числу Кнудсена.

Kn	$s_0(N = 0)$	$s(N = 1)$	$s(N = 2)$	$s(N = 3)$
10	3.162	4.378	4.387	4.213
1	1.631	2.176	1.883	1.768
0.1	1.055	1.223	1.091	1.067

Табл. 1. Коэффициент разделения в ТБН с разным количеством ступеней N и при разных значениях Kn

Заключение. На основании численных расчетов показано, что турбомолекулярный насос (система вращающихся турбин) может быть использован для разделения газовых смесей. Было показано, что эффект разделения присутствует в широком диапазоне чисел Кнудсена, усиливается с увеличением длины лопаток, однако падает с увеличением количества секций. Также получено, что наибольший эффект достигается, когда отношение скорости вращения турбин к характерной тепловой скорости молекул примерно равно тангенсу угла наклона лопаток.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова и вычислительных ресурсов МСЦ РАН.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 23-71-10057).

Список использованных источников

1. Becker W. //Vacuum. – 1966. – Т. 16. – №. 11. – С. 625-632.
2. Sharipov F. //Journal of Vacuum Science & Technology A. – 2010. – Т. 28. – №. 6. – С. 1312-1315.
3. Косьянчук В. В., Якунчиков А. Н. Свободномолекулярное течение газа в канале с изгибающейся границей //Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2018. – №. 3. – С. 87-97.
4. Yakunchikov A., Kosyanchuk V. A new principle of separation of gas mixtures in non-stationary transitional flows //Acta Astronautica. – 2019. – Т. 163. – С. 120-125.
5. Yakunchikov A. The outflow of gas mixture into vacuum, periodically interrupted by bodies moving towards the jet //Vacuum. – 2023. – Т. 209. – С. 111778.
6. Берд Г. Молекулярная газовая динамика/Пер. с англ. под ред. ОМ Белоцерковского и МН Когана. – 1981.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРЁХЗВЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

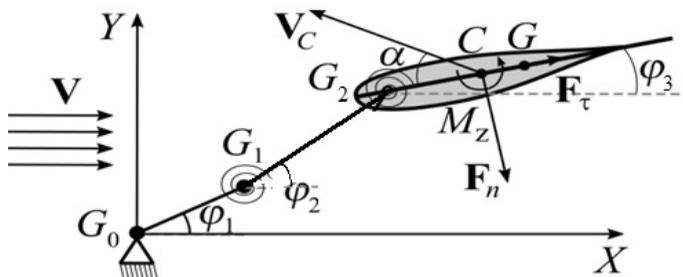
А.П. Голуб

Аннотация. Рассматривается трёхзвенный маятник, на третьем звене которого, расположен симметричный аэродинамический профиль. В межзвенных шарнирах маятника (между первым и вторым, вторым и третьем звеньями) закреплены пружины. Вся система помещена в поток воздуха, скорость которого на бесконечности постоянна. Исследуется влияние жёсткости пружин и положение крыла на третьем звене на движение маятника. В работах [1-2] была рассмотрена похожая система с двухзвенным маятником.

Для описания аэродинамического воздействия была использована квазистатическая модель, в рамках которой, оно сводилось к силе сопротивления, подъёмной силе и крутящему моменту. Составлена система уравнений, описывающая поведение трёхзвенного маятника. Проведено численное моделирование полученных уравнений.

Предполагается использовать такую механическую систему для преобразования энергии ветра в механическую энергию. Преимуществами данной системы может служить низкая скорость старта и то, что она будет работать при любом направлении ветра.

Постановка задачи. Трёхзвенный аэродинамический маятник, представляет собой трёхзвенный маятник (рис.1), на третьем звене которого закреплён аэродинамический профиль. Оси вращения маятника вертикальны. Он помещён в поток воздуха. Профиль закреплён вдоль оси третьего звена и симметричен (NACA0015). При определённых значениях параметров, такая система может совершать колебательные движения, что было показано в работе [1].



*Рис.1. Трёхзвенный аэродинамический маятник
(вид сверху)*

Для описания аэродинамического воздействия, используется квазистатический подход, в рамках которого аэродинамическое воздействие раскладывается на силу сопротивления, подъёмную силу и аэродинамический момент.

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_c^2 C_n(\alpha), \quad F_\tau = \frac{\rho S}{2} V_c^2 C_\tau(\alpha), \quad M_z = \frac{\rho S}{2} b V_c^2 C_m(\alpha)$$

Здесь ρ – плотность воздуха, S – характерная площадь лопасти, b – длина хорды лопасти, $C_n(\alpha)$ и $C_\tau(\alpha)$ безразмерные коэффициенты силы сопротивления и подъёмной силы, соответственно, $C_m(\alpha)$ безразмерный коэффициент аэродинамического момента. Для моделирования был выбран симметричный профиль, поэтому выполнены следующие условия:

$$C_n(\alpha) = C_n(-\alpha), \quad C_\tau(\alpha) = -C_\tau(-\alpha), \quad C_m(\alpha) = -C_m(-\alpha)$$

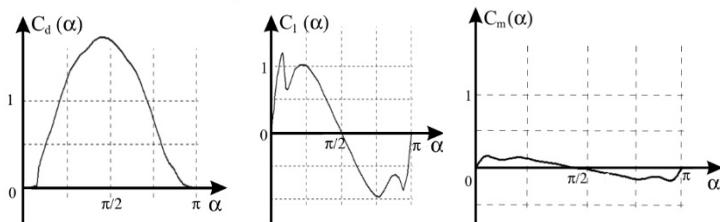


Рис.2. Зависимости аэродинамических характеристик

Угол атаки и V_C определяются из следующих кинематических соотношений:

$$V_C \cos \alpha = V \cos \varphi_3 + \sum_{i=1}^3 r_i \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i - \varphi_3),$$

$$V_C \sin \alpha = V \sin \varphi_3 + \sum_{i=1}^3 r_i \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \varphi_3)$$

Уравнения движения, имеют следующий вид

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{\varphi}_j + \sum_{j=1}^n u_{ij} \dot{\varphi}_j^2 = Q_i, \quad i = 1..3$$

$$a_{ij} = l_i l_j (m + m_0(n - \max(i, j))) \cos(\varphi_j - \varphi_i) + m r_0^2 \delta_{in} \delta_{jn}$$

$$u_{ij} = -l_i l_j (m + m_0(n - \max(i, j))) \sin(\varphi_j - \varphi_i)$$

$$Q_i = -(\varphi_i - \varphi_{i-1})(1 - \delta_{li}) - (\varphi_i - \varphi_{i+1})(1 - \delta_{ni}) - \chi \dot{\varphi}_1 \delta_{li} - h(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})(1 - \delta_{li}) -$$

$$- h(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i+1})(1 - \delta_{ni}) - \mu V_C^2 (r_i C_n \cos(\varphi_i - \varphi_n) + r_i C_\tau \sin(\varphi_i - \varphi_n) - C_m b \delta_{ni})$$

$$\mu = \rho S l_0 / 2m_0$$

В системе учитывается демпфирование в звеньях маятника, которого не избежать, при конструировании реального объекта. Был выписан характеристический полином и проведено аналитическое исследование, но для более детального анализа, в силу нелинейности системы, было проведено численное моделирование.

Численное исследование. Было проведено численное исследование системы полученных уравнений. Были взяты параметры для реального объекта.

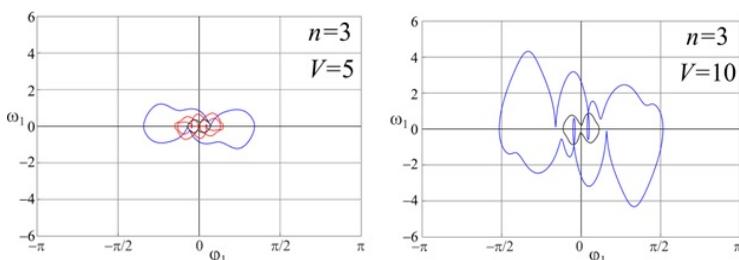


Рис.3. Зависимость угловой скорости от угла, для первого звена

Результаты моделирования, показаны на Рис.3. Было найдено, по крайней мере, три устойчивых периодических движения. Однако, при увеличении скорости набегающего потока, одно из них перестало существовать и осталось два. В сравнении с двухзвенным маятником, где было найдено два периодических движения, трёхзвенный маятник имеет преимущество, потому что наличие большего числа неустойчивых режимов, позволяет выбрать более оптимальный для работы ВЭУ. Также, уменьшается значение скорости потока, при котором маятник начинает движение (в сравнении с двухзвенным маятником, при условии, что есть трение). Это позволяет применять его в более широком диапазоне скоростей ветра.

Заключение. В работе рассмотрена задача о движении трёхзвенного аэродинамического маятника. Составлены уравнения движения данного объекта. Проведено численное моделирование. Показано, что при определённых параметрах системы, может быть несколько периодических решений.

Список использованных источников

1. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жёсткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // Доклады Академии Наук. 2018. Том 481. №3. С. 254-257
2. Голуб А.П. Экспериментальное исследование упруго-закреплённого аэродинамического двухзвенного маятника // Труды конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ. 2018. С. 77-81

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АНИЗОТРОПНЫХ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ТЕЛ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д.И. Меркулов

Аннотация. В работе рассмотрено взаимодействие двух анизотропных намагничивающихся сферических тел во внешнем однородном магнитном поле. Аналитически получена и исследована сила, действующая на одно из этих тел со стороны неоднородного магнитного поля, индуцированного вторым телом. Данная сила представлена как сила взаимодействия двух диполей с магнитными моментами специального вида. Вычислены соответствующие магнитные моменты. Выполнены расчеты значений сил и моментов сил при различных параметрах задачи, в частности, направлениях векторов анизотропии и магнитного поля.

Введение. Исследованию намагничивающихся эластомеров (НЭ), то есть дисперсных сред, состоящих из упругой полимерной матрицы (силикон) и распределенных в ее объеме ферромагнитных микро- или наночастиц, посвящено значительное количество научных работ. Например, в статьях [1] и [2] теоретически и экспериментально, соответственно, изучены деформации тонких тел из НЭ в неоднородном магнитном поле. Если при изготовлении НЭ феррочастицы выстроятся в цепочки или ориентируются осями легкого намагничивания вдоль некоторого направления, то такой материал приобретет анизотропные свойства. Магнитные свойства анизотропных намагничивающихся эластомеров (АНЭ) экспериментально исследованы в работах [3, 4]. В работе [4] была получена формула для силы, действующей на тело из АНЭ в неоднородном магнитном поле. На основании данной формулы в работах [5, 6] исследовано движение сферического тела из АНЭ в неоднородном магнитном поле.

С использованием сферических тел из АНЭ можно изготовить автономные движители, аналогичные рассмотренным в статье [7]. При этом единичные векторы анизотропии τ_1, τ_2 ($\tau_i = \cos \varphi_i e_x + \sin \varphi_i e_z$), направленные вдоль цепочек частиц либо осей легкого намагничивания, могут быть ориентированы различным образом. Один из возможных вариантов такого автономного движителя схематически представлен на Рис. 1.

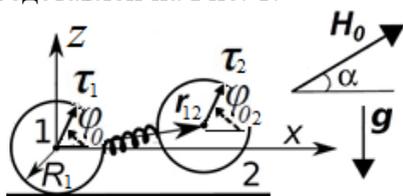


Рис. 1. Вариант автономного движителя с телами из АНЭ

Для теоретического исследования движителя из АНЭ необходимо вычислить силу и момент силы, с которыми взаимодействуют анизотропные сферические тела. Движение тел, содержащих элементы из АНЭ, под действием поля постоянного магнита экспериментально исследовано в [8].

В предлагаемой работе рассмотрено взаимодействие двух анизотропных намагничивающихся сферических тел во внешнем однородном магнитном поле. Аналитически получена и исследована сила, действующая на одно из этих тел со стороны неоднородного магнитного поля, индуцированного вторым телом. Данная сила представлена как сила взаимодействия двух диполей с магнитными моментами специального вида. Вычислены соответствующие магнитные моменты. Получена формула для момента магнитной силы, действующего на сферическое анизотропное намагничивающееся тело. Выполнены расчеты значений сил и моментов сил при различных параметрах задачи, в частности, направлениях векторов анизотропии.

Теория. Введем магнитную проницаемость АНЭ, а также дополнительные параметры магнитных свойств тела и

среды ($\mu^{(e)}$ – магнитная проницаемость среды; $\mu^{(i)} > 0$, $a > 0$ – постоянные, определяемые в эксперименте [3]):

$$\mu_{ij} = \mu^{(i)} g_{ij} + a \tau_i \tau_j, a_1 = \frac{\mu^{(e)} - \mu^{(i)} - a}{2\mu^{(e)} + \mu^{(i)} + a}, a_2 = \frac{\mu^{(e)} - \mu^{(i)}}{2\mu^{(e)} + \mu^{(i)}}. \quad (1)$$

Формула, полученная в работе [4], была переписана для силы, действующей на первое сферическое тело из АНЭ в неоднородном магнитном поле \mathbf{H}_2 , индуцированном вторым телом ($k_\mu = (a_1 - a_2)(\mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_1)^2 / H_2^2 + a_2$; R_1, R_2 – радиусы тел):

$$\mathbf{F}_{m1} = -\mu^{(e)} R_1^3 (k_\mu \nabla H_2^2 / 2 - (a_2 - a_1)(\mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_1)(\nabla_i H_{2j}) \tau_{1\perp}^j e^i). \quad (2)$$

Выполнив преобразования, формулу (2) можно свести к силе диполь-дипольного взаимодействия с магнитными моментами $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ специального вида ($\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$, см. Рис. 1):

$$\mathbf{F}_{m1} = -\mu^{(e)} \left(m_{1i} \frac{\partial H_{2i}}{\partial x} \mathbf{e}_x + m_{1i} \frac{\partial H_{2i}}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \frac{\mathbf{m}_2}{r_{21}^3} - \frac{3(\mathbf{m}_2 \mathbf{r}_{21}) \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^5}; \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \frac{\mathbf{m}_1}{r_{12}^3} - \frac{3(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_{12}) \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^5};$$

$$\mathbf{m}_1 = R_1^3 (a_2 \mathbf{H}_2 - (a_2 - a_1)(\mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_1) \boldsymbol{\tau}_1); \quad (5)$$

$$\mathbf{m}_2 = R_2^3 (a_2 \mathbf{H}_1 - (a_2 - a_1)(\mathbf{H}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \boldsymbol{\tau}_2).$$

Решив систему (3)-(5), можно получить в точности формулу для силы диполь-дипольного взаимодействия [9]:

$$\mathbf{F}_{m1} = -\mu^{(e)} \left(r_{12} \left(\frac{3(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2)}{r_{12}^5} - \frac{15(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_{12})(\mathbf{m}_2 \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^7} \right) + \frac{3(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_{12}) \mathbf{m}_2}{r_{12}^5} + \frac{3(\mathbf{m}_2 \mathbf{r}_{12}) \mathbf{m}_1}{r_{12}^5} \right). \quad (6)$$

Таким образом, показано, что сила (2), с которой взаимодействуют два сферических тела из АНЭ, помещенных в однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 , равна силе взаимодействия двух диполей (6) с магнитными моментами вида (5).

Также получена формула для момента магнитной силы, действующего на первое сферическое тело из АНЭ со стороны магнитного поля, индуцированного вторым телом:

$$\mathbf{M}_{m1} = \mu^{(e)} R_1^3 (a_2 - a_1)(\mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_1)(\mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_{1\perp}) \mathbf{e}_y, \boldsymbol{\tau}_{1\perp} = \boldsymbol{\tau}_1 - (\mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_1) \mathbf{H}_2 / H_2^2. \quad (7)$$

Подставив в формулы (1), (3)-(5) и (7) параметры магнитных свойств материала $\mu^{(i)}$, a , и среды $\mu^{(e)}$, координаты и радиусы тел, величину H_0 и направление поля (угол α , см. Рис. 1), направления единичных векторов анизотропии τ_1, τ_2 (углы φ_{01} и φ_{02} , см. Рис. 1), можно численно определить силу F_{m1} и момент M_{m1} , действующие на первое сферическое тело из АНЭ со стороны второго тела.

Численные расчеты. Вычисления проводились при следующих параметрах, допустимых для реализации в эксперименте: $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0,5$ см, $z_2 = 0$, $H_0 = 400$ Э, $\mu^{(e)} = 1$, $\mu^{(i)} = 1,05$, $a = 0,15$, $R_1 = R_2 = 0,18$ см. Рассматривались коллинеарные векторы анизотропии ($\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi$) и различные направления магнитного поля: 0 , $\pi/4$, $\pi/2$. При этом угол φ изменялся в пределах от 0 до π .

На Рис. 2а и Рис. 2б линией 2 представлены зависимости, соответственно, x -компоненты и z -компоненты магнитной силы, действующей на первое тело, в зависимости от угла φ между горизонталью и направлением векторов анизотропии. Магнитное поле направлено вертикально ($\alpha = \pi/2$). Линией 1 показано соответствующее значение силы для изотропного образца (в этом случае $a = 0$).

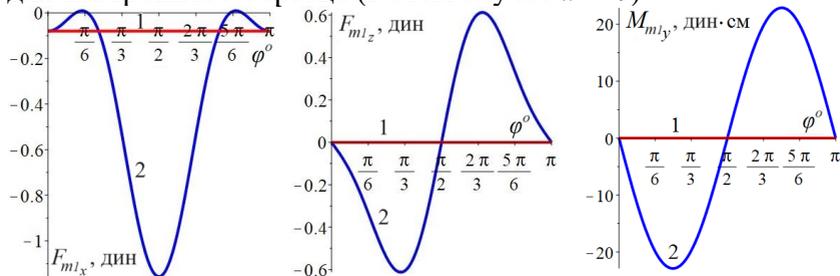


Рис. 2а: Сила по x Рис. 2б: Сила по z Рис. 2в: Момент

Видно, что значения силы, с которой взаимодействуют изотропные тела, и силы взаимодействия аналогичных тел из АНЭ равны при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. При этом горизонтальная компонента силы для анизотропных тел при $\varphi = \pi/2$ на

порядок превышает силу взаимодействия изотропных тел. Модуль вертикальной компоненты силы в данном случае для изотропных тел равен нулю, а для анизотропных имеет максимумы при $\varphi = 5\pi/16$ и $\varphi = 11\pi/16$. На Рис. 2в представлена зависимость момента магнитной силы от угла φ . Модуль момента имеет максимумы при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 3\pi/4$ (линия 2). На изотропные тела момент силы не действует (линия 1).

На Рис. 3а и Рис. 3б линией 2 представлены зависимости, соответственно, x -компоненты и z -компоненты магнитной силы, действующей на первое тело, в зависимости от угла φ . Магнитное поле направлено под углом $\alpha = \pi/4$. Линией 1 показано соответствующее значение силы для изотропного образца (в этом случае $a = 0$).

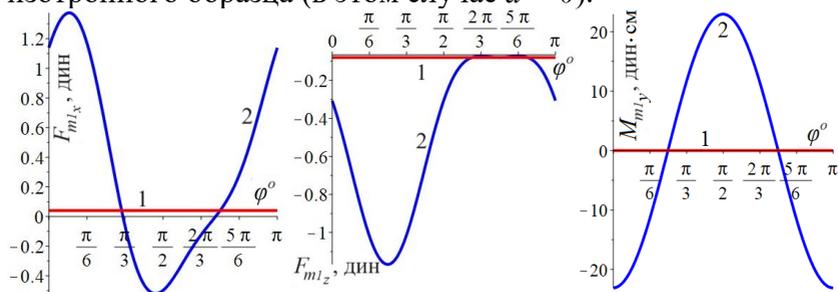


Рис. 3а: Сила по x Рис. 3б: Сила по z Рис. 3в: Момент

Видно, что горизонтальная компонента магнитной силы, действующей на анизотропное тело, меняет свое направление в зависимости от угла φ , но практически всегда по величине превышает соответствующую компоненту силы взаимодействия изотропных тел. Модуль вертикальной компоненты силы в данном случае для тела из АНЭ имеет максимум при $\varphi = \pi/4$, а в диапазоне φ от $7\pi/12$ до $11\pi/12$ близок по значению к вертикальной компоненте силы взаимодействия изотропных тел. При этом максимальное значение модуля вертикальной силы взаимодействия тел из АНЭ превышает 1 дин, что может быть достаточным для

отрыва тела от опоры и, как следствие, для создания направленного движения указанного на Рис. 1 автономного движителя. На Рис. 3в приведена зависимость момента магнитной силы от угла φ , которая имеет максимум при $\varphi = \pi/2$ (линия 2). На изотропные тела момент силы не действует (линия 1).

На Рис. 4а и Рис. 4б линиями 2 представлены зависимости, соответственно, x -компоненты и z -компоненты магнитной силы, действующей на первое тело, в зависимости от угла φ . Магнитное поле направлено горизонтально ($\alpha = 0$). Линией 1 показано соответствующее значение силы для изотропного образца (в этом случае $a = 0$).

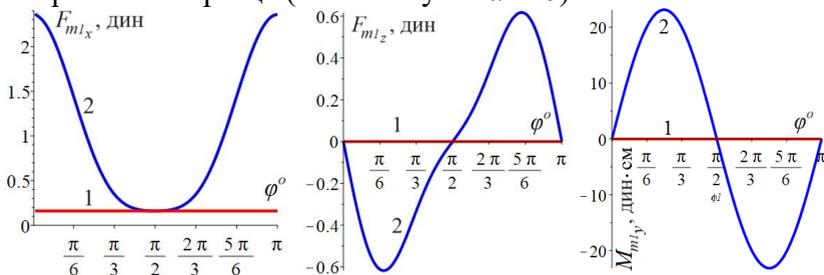


Рис. 4а: Сила по x Рис. 4б: Сила по y Рис. 4в: Момент

Видно, что значения силы, с которой взаимодействуют изотропные тела, и силы взаимодействия аналогичных тел из АНЭ равны при $\varphi = \pi/2$. При этом горизонтальная компонента силы для анизотропных тел при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ на порядок превышает силу взаимодействия изотропных тел. Модуль вертикальной компоненты силы в данном случае для изотропных тел равен нулю, а для анизотропных имеет максимумы при $\varphi = 3\pi/16$ и $\varphi = 13\pi/16$. На Рис. 4в представлена зависимость момента магнитной силы от угла φ . Модуль момента имеет максимумы при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 3\pi/4$ (линия 2). На изотропные тела момент силы не действует (линия 1).

Таким образом, исследована сила и момент силы взаимодействия двух сферических тел из АНЭ в зависимости

от направления коллинеарных векторов анизотропии при различных направлениях приложенного магнитного поля.

Заключение. Аналитически получена и исследована сила, действующая на сферическое тело из анизотропного намагничивающегося эластомера со стороны неоднородного магнитного поля, индуцированного вторым таким же телом. Данная сила представлена как сила взаимодействия двух диполей с магнитными моментами специального вида. Выполнены расчеты сил и моментов сил при различных параметрах задачи, таких как направления векторов анизотропии и приложенного магнитного поля. Получено, что при некоторых параметрах задачи сила взаимодействия анизотропных тел существенно превышает магнитную силу между такими же изотропными телами. Показано, что данная сила может быть достаточной для отрыва тела от опоры и, как следствие, для создания направленного движения. Также получено, что на тела из анизотропного намагничивающегося эластомера, в отличие от изотропных тел, действует момент магнитной силы. Результаты данной работы могут быть полезны при создании автономных движителей, содержащих тела из анизотропных намагничивающихся материалов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-71-10002, <https://rscf.ru/project/20-71-10002/>. Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., проф. Налетовой В.А. и к.ф.-м.н. Пелевиной Д.А. за участие в представленном исследовании.

Список использованных источников

1. Меркулов Д.И., Неоднозначность деформации тел из намагничивающегося эластомера в магнитном поле / Труды конференции-конкурса молодых ученых. 12-14 октября 2015 г. / М.: Издательство Московского университета, 2016. – с. 167-175.
2. Меркулов Д.И., Экспериментальное исследование деформации тонкого тела из намагничивающегося

- эластомера / Труды конференции-конкурса молодых ученых. 10-12 октября 2016 г. / М.: Издательство Московского университета, 2017. – с. 150-157.
3. Демин А.А., Магнитные свойства анизотропного намагничивающегося эластомера / Труды конференции-конкурса молодых ученых. 15-17 октября 2018 г. / М.: Издательство Московского университета, 2019. – с. 82-89.
 4. Demin A.A., Merkulov D.I., Pelevina D.A., Kalmykov S.A., Naletova V.A., Determination of parameters of anisotropic magnetizable elastomer // *Magneto hydrodynamics*, 2019, Vol. 55, No. 3, pp. 347-352.
 5. Меркулов Д.И., Анизотропный намагничивающийся шар в неоднородном магнитном поле / Труды конференции-конкурса молодых ученых (17-21 октября 2022 г.) / М.: Издательство Московского университета, 2023. – с. 54-61.
 6. Merkulov D.I., Pelevina D.A., Turkov V.A., Naletova V.A., Motion of an Anisotropic Magnetizable Elastomer in the Field of a Coil with Current Taking into Account the Interaction with Inclined Surface // *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2023, Vol. 78, No 1, pp. 1-6.
 7. Merkulov D.I., Pelevina D.A., Turkov V.A., Vinogradova A.S., Naletova V.A., Mobile robots with magnetizable materials in alternating uniform inclined magnetic fields // *Acta Astronautica*, 2021, Vol. 181, pp. 579-584.
 8. Kim Y., Yuk H., Zhao R., Chester S.A., Zhao X., Printing ferromagnetic domains for untethered fast-transforming soft materials // *Nature*, 2018, Vol. 558, No. 7709, pp. 274-279.
 9. Yung K.W., Landecker P.B., Villani D.D., An analytic solution for the force between two magnetic dipoles. // *Magnetic Electr. Sep.*, 1998, Vol. 9, pp. 39-52.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ И ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ТИКСОТРОПНЫХ СРЕД, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СТРУКТУРЫ И ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В.В. Гулин

Аннотация. Рассматривается нелинейное определяющее соотношением типа Максвелла для описания сдвигового течения тиксотропных сред, которое учитывает взаимное влияние на вязкость и модуль сдвига процесса деформирования и эволюции структуры (кинетики образования и разрушения межмолекулярных связей). Состояние структуры в модели характеризуется единственным скаляром w – параметром структурированности. В одноосном случае определяющее соотношение управляется неубывающей материальной функцией и шестью положительными параметрами. Определяющее соотношение сводится к двум нелинейным автономным дифференциальным уравнениям.

Аналитически изучен фазовый портрет системы. Обнаруженные общие свойства проиллюстрированы графиками (численных) решений задач Коши. Проанализировано влияние материальных параметров и материальной функции на тип точки равновесия, на поведение характеристических корней и интегральных кривых модели, исследовано влияние начальных условий на свойства интегральных кривых. В частности, детально исследован случай немонотонности решений системы и существование режимов деформирования с (затухающими) колебаниями напряжения.

1. Введение. Для моделирования таких природных и технологических процессов как движение магмы, поведение

илистых грунтов, глин, зыбучих песков, сход селей и лавин, разнообразных технологий переработки полимеров и других материалов (3D-печати экструзией, прессования, сверхпластической штамповки и т. п.), нефтедобычи (в частности, методом гидроразрыва пласта) и перекачки нефти, производства лаков, красок, масел, пищевых продуктов, медицинской микрофлюидики и многих других необходимо понимание нелинейных реологических эффектов и закономерностей, протекающих в структурированных средах.

Одним из способов построения определяющих соотношений и моделирования процессов эволюции структуры в процессе деформирования материалов является модификация модели вязкоупругости Максвелла (1)

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta} \quad (1)$$

путём введения зависимости модуля сдвига G и вязкости η от некоторого параметра (степени) структурированности $w \in [0,1]$ [1]. В текущей работе рассматриваются следующие возрастающие функции параметра структурированности:

$$\eta(w) = \eta_0 e^{\alpha w}, \quad G(w) = G_0 e^{\beta w}. \quad (2)$$

И введение кинетического уравнения (3), определяющего эволюцию структуры и связь с процессом деформирования

$$\dot{w} = k_1(1-w) - k_2 g(\tau) w, \quad (3)$$

где k_1 и k_2 – положительные константы, $g(\tau)$ – неубывающая функция, обеспечивающая разрушение структуры при увеличении сдвигового напряжения τ . Из последнего уравнения следует, что при уменьшении действующего напряжения τ значение параметра структурированности w будет расти (восстанавливаться) до равновесного,

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G(w)} + \frac{\tau}{\eta(w)} \\ \dot{w} = k_1(1-w) - k_2 g(\tau)w \end{cases} \quad (4)$$

это позволяет утверждать, что модель (4) позволяет описывать тиксотропные среды – уменьшающие вязкость от механического воздействия и увеличивающие её в состоянии покоя.

Необходимо исследование возможностей системы (4) моделировать поведение типовых экспериментальных кривых, таких как диаграммы деформирования с постоянной скоростью, кривые ползучести и восстановления, кривые релаксации и другие. Эта работа начата в цикле статей [2, 3, 4]. Текущая статья посвящена первому – исследованию диаграмм деформирования, порождаемых структурной моделью Максвелла (4).

2. Нелинейная модель сдвигового течения тиксотропных сред в условиях постоянной скорости сдвига. Для исследования качественных свойств, предсказываемых моделью в текущей статье предлагается рассмотреть одно из простейших механических испытаний – построение диаграммы деформирования при постоянной скорости сдвига. Для этого произведём обезразмеривание системы (4). Безразмерное время (обозначаем штрихованными переменными) выбираем так: $t = T_0 t'$, где $T_0 = \eta_0 / G_0$ – минимальное время релаксации модели Максвелла (при $w = 0$). Безразмерное напряжение $\tau = \tau_c s$, где τ_c – некоторое критическое напряжение или просто величина, пропорциональная G_0 . Считая скорость сдвига постоянной $\dot{\gamma} = v = const$, используя (2) и опуская штриховое обозначение для безразмерных переменных и функции безразмерного переменного, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{s} = ae^{\beta w} - se^{(\beta-\alpha)w} \\ \dot{w} = c[1 - w(1 + bg(s))] \end{cases} \quad (5)$$

где $a = v\eta_0/\tau_c$ – безразмерная скорость сдвига, а $b = k_2/k_1$ и $c = k_1T_0$ – безразмерные параметры, характеризующие скорость протекания процессов образования и разрушения структуры.

Относительно системы (5) было доказано [5, 6] существование и единственность положения равновесия, а также его тип. В зависимости от параметров системы оно может быть узлом или фокусом, последнее означает возможность (затухающих) осцилляций относительно равновесного напряжения в зависимости от величины приложенной скорости сдвига.

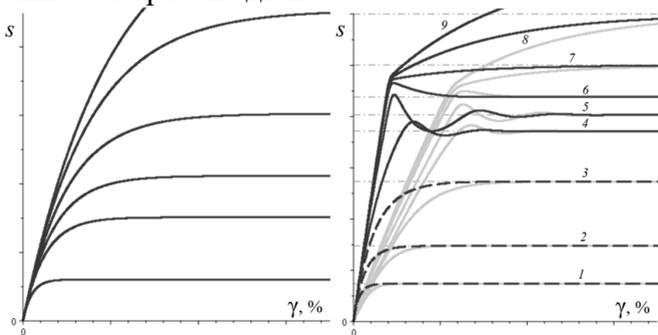


Рис.1 Кривые деформация-напряжение при разных скоростях деформации для: классической модели Максвелла (слева) и предложенной модификации, учитывающей эволюцию структуры (справа).

Особенности поведения интегральных кривых можно представить через графики, обладающие ясным механическим смыслом – диаграммами деформирования. Для модели с $g(s) = e^{hs}$, $h = 0.07$, $c = 0.3$, $b = 10^{-12}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ и со следующими значениями безразмерной скорости деформации (сдвига): $a = 10, 20, 37, 70, 200, 400, 500, 600, 700$

на рис. 1 приведена сводная диаграмма деформирования среды, обладающей скоростной чувствительностью (диаграмма деформирования зависит от скорости деформирования) при $w(0) = 0$ (серым) и $w(0) = 1$ (чёрным), номер кривой по возрастанию соответствует выбранным значениям параметра a . Кривые 1-3, а также 6-9 соответствуют положению равновесия типа узел, а кривые 4 и 5 соответствуют положению равновесия типа фокус. Для иллюстрации различий по сравнению с классической моделью Максвелла (1) на том же рис. 1 слева приведена диаграмма деформирования для случая $\alpha = \beta = 0$ – в таком случае процесс деформирования не связан с параметром структурированности w .

Постоянство скорости сдвига позволяет отождествить интегральные кривые $s(t)$ с представленными выше диаграммами деформирования. Действительно, если $\gamma = vt$, то кривые $s(t)$ отличаются от $s(\gamma)$ всего лишь выбором масштаба по оси абсцисс.

Рис. 2 иллюстрирует смену типа положения равновесия по сценарию узел-фокус-узел по мере увеличения скорости сдвига. Положение равновесия определяется как точка пересечения вертикальной и горизонтальной изоклины фазового портрета системы (5) (штриховые кривые) посредством приравнивания левой части каждого уравнения к нулю.

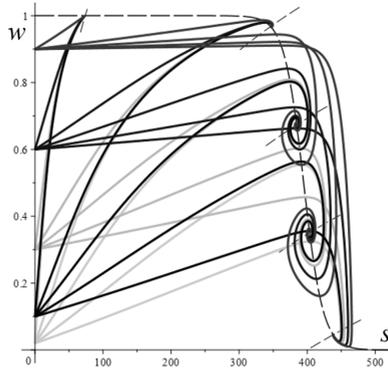
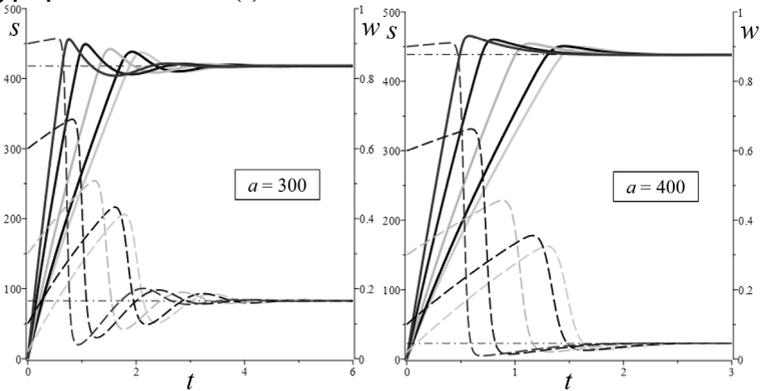


Рис.2 Эволюция фазового портрета системы (5). Интегральные кривые построены для $s(0) = 0$, $w(0) = 0, 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$.

На рис. 3 представлены интегральные кривые системы (5) для той же модели с $g(s) = e^{hs}$, $h = 0.07$, $c = 0.3$, $b = 10^{-12}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. При $a = 300$ положение равновесия – фокус, что подтверждается затухающими осцилляциями $s(t)$ и $w(t)$. Для остальных представленных значений $a = 400, 500$ и 750 – положение равновесия – узел, при этом можно заметить, что излом кривой $s(t)$ соответствует моменту падения графика структурированности $w(t)$.



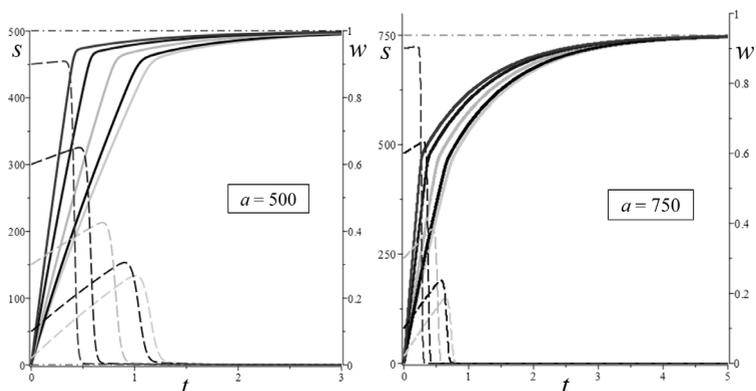


Рис.3 Интегральные кривые системы (5) для разных значений безразмерной скорости сдвига a . Сплошными $s(t)$ и штриховыми $w(t)$ для начальных условий $s(0) = 0$, $w(0) = 0$, 0.1, 0.3, 0.6, 0.9 (отличаются наклоном на первом участке)

Заключение. Были исследованы интегральные кривые, фазовые портреты и диаграммы деформирования, порождаемые структурной моделью Максвелла, в условиях постоянной скорости деформации.

Схожесть кривой на рис. 3 при $a = 400$ с диаграммой деформирования металлов, обладающих зубом текучести, заставляет задуматься о возможности описания этого явления структурным параметром w . В самом деле, в научной литературе, посвящённой исследованию процесса динамической рекристаллизации меди в зависимости от начального среднего размера зёрен, можно встретить характерные диаграммы деформирования с зубом текучести и с затухающими колебаниями [7-8]. Примером из другой сферы является возникновение автоколебаний кажущейся вязкости в коллоидных дисперсиях при постоянной скорости сдвига, примеры которых приводятся в [9].

Таким образом, совпадение качественных особенностей интегральных кривых исследуемой модели с экспериментальными кривыми позволяет считать

перспективным предложенный подход к моделированию структурированных сред.

Список использованных источников

1. Stolin A. M., Khokhlov A. V. Nonlinear model of shear flow of thixotropic viscoelastoplastic continua taking into account the evolution of the structure and its analysis // Moscow University Mechanics Bulletin. 2022, Vol. 77, No. 5, pp. 127–135.
2. Khokhlov A. V., Gulin V. V. Families of stress-strain, relaxation, and creep curves generated by a nonlinear model for thixotropic viscoelastic-plastic media accounting for structure evolution. Part 1. The model, its basic properties, integral curves and phase portraits // Mechanics of Composite Materials. 2024, Vol. 60, No.1, pp.49-66
3. Khokhlov A. V., Gulin V. V. Families of stress-strain, relaxation, and creep curves generated by a nonlinear model for thixotropic viscoelastic-plastic media accounting for structure evolution. Part 2. Relaxation and stress-strain curves // Mechanics of Composite Materials. 2024, Vol. 60, No. 2.
4. Khokhlov A. V., Gulin V. V. Families of stress-strain, relaxation, and creep curves generated by a nonlinear model for thixotropic viscoelastic-plastic media accounting for structure evolution. Part 3. Creep curves // Mechanics of Composite Materials. 2024, Vol. 60, no. 3.
5. Хохлов А. В. Точка равновесия и фазовый портрет модели течения тиксотропных сред, учитывающей эволюцию структуры // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2023, № 4, с. 30–39
6. Хохлов А. В., Гулин В. В. Анализ свойств нелинейной модели сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластичных сред, учитывающей взаимное влияние эволюции структуры и процесса деформирования // Физическая мезомеханика, 2023, т. 26, № 4, с. 41–63

7. Blaz L., Sakai T, Jonas J. J. Effect of initial grain size on dynamic recrystallization of copper // *Metal Science*, 1983, 17, No.12, pp. 609-616
8. Gao W., Belyakov A., Miura H., Sakai T. Dynamic recrystallization of copper polycrystals with different purities // *Materials Science and Engineering: A*, 1999, 265, №1-2, pp. 233–239
9. Малкин А. Я., Куличихин В. Г. Структура и реологические свойства высококонцентрированных эмульсий. Современный взгляд // *Успехи химии*, 2015, 84, №8, с. 803–825

ОТРАБОТКА МЕТОДИКИ ЗАСЕВА СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ТРАССЕРОВ PIV-СИСТЕМЫ

И. А. Загайнов

Аннотация. Наиболее известным среди панорамных методов является анемометрия по изображениям частиц PIV [1]. Метод PIV находит широкое применение в практике исследований течения газов с высокими сверхзвуковыми скоростями [2]. В рамках работы произведена отладка двумерной двухкомпонентной системы «Сигма Про» на базе сверхзвуковой аэродинамической установки AP-2 [3]. Представлены результаты сравнительного исследования применимости различных типов трассеров для засева потока: частицы DEHS, жидкий углекислый газ и дистиллированная вода, подаваемая через форсунки в форкамере установки. Актуальность исследования заключается в определении оптимального типа трассирующих частиц и их количестве для использования метода PIV.

Введение. Панорамные (полевые) методы измерений, в отличие от традиционных (термоанемометр, лазерная доплеровская анемометрия и др.), обладают рядом преимуществ. Например, они позволяют измерять мгновенные распределения физических величин, выявлять в потоке когерентные структуры, исследовать нестационарные потоки и быстропротекающие процессы [1]. Наиболее известным среди панорамных методов является анемометрия по изображениям частиц PIV (Particle Image Velocimetry).

1. Использование метода PIV.

Метод PIV – это оптический метод измерения мгновенных полей скорости газа в выбранном сечении потока. Импульсный лазер создает тонкий световой нож и освещает мелкие частицы - трассеры, взвешенные в исследуемом потоке. Положения частиц в момент двух

последовательных вспышек лазера регистрируются на два кадра цифровой камеры. Скорость потока определяется расчетом перемещения, которое совершают частицы за время между вспышками лазера. Определение перемещения основано на применении корреляционных методов к трассерным картинам, с использованием регулярного разбиения на элементарные области.

Для повышения точности измерений набирается статистика измерений из десятков и сотен таких кадров, в результате получают векторные поля скорости практически во всей области измерения. Для автоматизации процесса обработки серии кадров используется кросс-корреляционный метод, позволяющий оцифровать каждый кадр по яркости элементов (частицы-фон) и в результате получить комбинацию всех возможных совпадений для всех частиц на каждом втором кадре [4]. При этом, шумовой пик, отвечающий за реальное перемещение частиц, будет выше всех остальных пиков, отражающих другие возможные перемещения частиц из первого кадра во второй.

Результаты. Произведены тестовые запуски сверхзвуковой аэродинамической установки с различными видами трассеров: частицами DEXS через генератор аэрозоля Ласкина, жидким углекислым газом и дистиллированной водой, подаваемой через форсунки мелкодисперсного распыла в форкамере установки. Наилучшее качество засева было получено при использовании жидкости DEXS. Засев углекислым газом приводил к туманообразованию в сверхзвуковой области с неравномерным распределением частиц по сечению и, по-видимому, слишком малому (меньше 1 мкм) размеру формируемых частиц для последующей корректной обработки полученных изображений. Капли дистиллированной воды, формируемые форсунками, оказались напротив слишком крупными (десятки микрометров), чтобы можно было утверждать

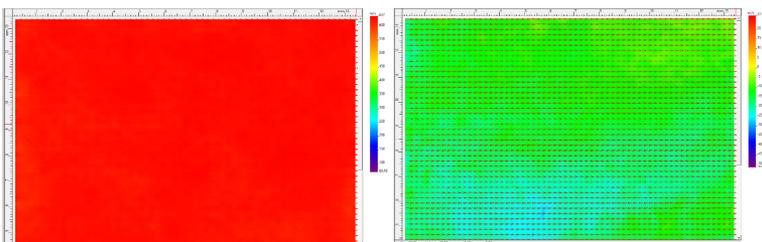


Рис. 2. Векторные поля продольной (слева) и поперечной (справа) составляющей скорости в центре канала

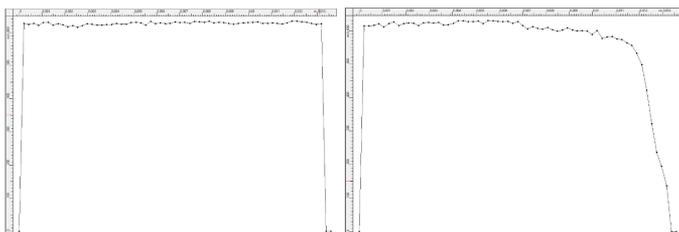


Рис. 3. Профили продольной составляющей скорости в центральной части (слева) и на стенке рабочей части канала (справа)

Заключение. Произведены тестовые запуски сверхзвуковой аэродинамической установки с различными видами трассеров: частицами DEHS, жидким углекислым газом, водой. Произведена отладка и тестовые запуски системы трассирующих частиц на базе оксида титана. Получены картины двумерного поля скорости в центральной части сверхзвукового канала.

Автор выражает благодарность С.С. Поповичу, А.Г. Здитовцу, Н.А. Киселеву и Ю.А. Виноградову за помощь в подготовке и проведении экспериментов, а также в интерпретации результатов.

Работа выполняется в рамках госбюджетной темы АААА-А16-116021110200-5 НИИ механики МГУ.

Список использованных источников

1. Попович С.С., Здитовец А.Г., Киселев Н.А., Виноградов Ю.А., Загайнов И.А. Отработка методики панорамной диагностики потоков на базе PIV при исследовании задач сверхзвуковой газодинамики // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 2022. Тезисы докладов. Изд-во Института механики МГУ (Москва). С. 176.
2. Стронгин М.М., Виноградов Ю.А., Здитовец А.Г., Киселёв Н.А., Попович С.С. Использование технологий National Instruments в экспериментальных исследованиях процессов термогазодинамики // Программная инженерия. 2017. Т. 8. № 5. С. 230-240.
3. Попович С.С. Особенности автоматизации эксперимента и обработки результатов при исследовании теплообмена в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа // Программная инженерия. 2018. Т. 9. № 1. С. 35-45.
4. Виноградов Ю.А., Леонтьев А.И., Попович С.С., Стронгин М.М. Экспериментальное исследование теплоотдачи при обтекании уступа сверхзвуковым потоком // Будущее машиностроения России. Сборник докладов. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2018. С. 369-372.

АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА В СЖИМАЕМОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ЩЕЛЕВОМ КАНАЛЕ

Н.А. Киселёв

Аннотация. Проведены исследования трения и теплообмена при течении сжимаемого газа в сверхзвуковом щелевом канале. Представлены данные о влиянии слабого и умеренного неравновесного положительного градиента давления (adverse pressure gradient, APG) на коэффициент трения c_f , теплоотдачи St , фактор аналогии Рейнольдса $s=2St/c_f$ и коэффициент восстановления температуры. Значения s оказались существенно ниже равновесных значений. Предельная величина фактора аналогии Рейнольдса практически не зависела от β_k в реализованном диапазоне градиентов давления и составила $s \approx 1.0$. При этом с ростом β_k начинает возрастать отличие от равновесных значений.

Введение. Вопрос описания закономерностей теплообмена и трения в высокоскоростных газовых потоках остается актуальным уже на протяжении столетия. Потребность в оценке коэффициентов трения и теплоотдачи при различных внешних воздействиях, в том числе в условиях градиента давления до сих пор поддерживают интерес к подобным исследованиям. Пограничные слои с градиентом давления представляют фундаментальный интерес, так как, в отличие от безградиентных течений, здесь присутствует дополнительная сила, вызванная продольным градиентом давления и управляющая процессом развития пограничного слоя [1].

В случае пограничных слоев с APG наиболее популярным параметром градиента давления является предложенный Клаузером параметр $\beta = (\delta^*/\tau_w) \cdot (dp/dx)$ [1], где δ^* - толщина вытеснения. Для того, чтобы нивелировать

влияние изменения плотности по высоте пограничного слоя в сжимаемых течениях используют модифицированный параметр β_K , в котором используется кинематическая толщина вытеснения δ_K^* без учета изменения плотности в пограничном слое $\beta = (\delta_K^* / \tau_w) \cdot (dp/dx)$.

В данной работе рассмотрено течения газа в щелевом сверхзвуковом канале с положительным градиентом давления. Такая постановка требовала наличия сверхзвукового сопла, установленного до исследуемого участка, где поток разгонялся от дозвукового на входе до сверхзвукового на выходе. Это приводило к тому, что уже на входе в исследуемый участок с градиентом давления необходимо учитывать влияние предыстории потока на пограничные слои. Обобщение результатов основывалось на сравнении со значениями коэффициентов трения и теплоотдачи равновесных пограничных слоев, полученных из решения Меллора и Гибсона [2] для динамического пограничного слоя и Co [3] для теплового.

Геометрия сверхзвукового щелевого канала с входным сечением $38.6 \times 3.8 \text{ mm}^2$ и критическим сечением $12 \times 3.8 \text{ mm}^2$, протяженностью 0.3 m (Рисунок 1), состоит из сверхзвукового сопла, исследуемой сверхзвуковой области с АGR и выходного диффузора. Боковые – узкие – стенки канала профилированы, протяженность дозвуковой части – 0.1 m , сверхзвуковой части – 0.16 m . Сверхзвуковой диффузор располагался на расстоянии $0.26-0.3 \text{ m}$ от входа.

Экспериментальные исследования проводились в два этапа. На первом этапе с помощью измеренных распределений статического давления, расхода и давления в форкамере определялись среднерасходные числа Маха и, далее, коэффициент трения методом Шапиро-Хоторна. Использовалось дифференциальное уравнение одномерного адиабатического течения в канале с заданной геометрией при наличии трения:

$$\frac{dM_{av}^2}{M_{av}^2} = -\frac{2\left(1 + \frac{k-1}{2}M_{av}^2\right)}{1 - M_{av}^2} \frac{dB}{B} + \frac{k \cdot M_{av}^2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M_{av}^2\right)}{1 - M_{av}^2} 4c_f \frac{dx}{H},$$

Коэффициент трения c_f определялся как величина, соответствующая экспериментальному распределению числа Маха M_{av} .

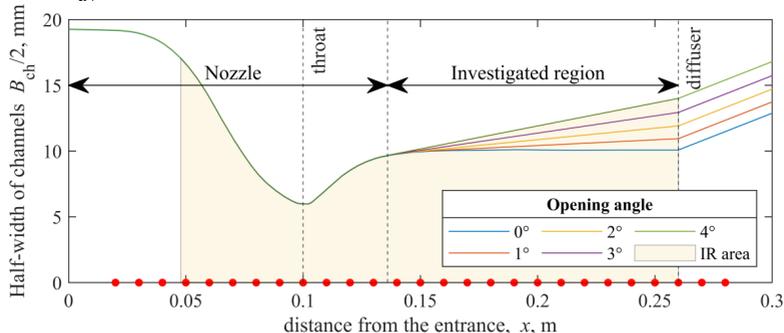


Рис. 1. Геометрия исследуемых каналов

На втором этапе проводились исследования коэффициентов теплоотдачи St и восстановления температуры r методом нестационарного теплообмена [4]. Более подробно метод изложен в [5]. С использованием экспериментально измеренного массового расхода воздуха и геометрии каналов определялись поля чисел Стентона St . Поле коэффициентов восстановления температуры r определялось с использованием локальной температуры теплоизолированной стенки, температуры торможения и распределения числа Маха.

Численные исследования. Для рассматриваемой задачи течения в узком канале [6] решалась система уравнений стационарного пограничного слоя в двухмерной постановке, выражающая законы сохранения массы, импульса и энтальпии. Решаемая система уравнений замыкается уравнением состояния совершенного газа. Турбулентная составляющая касательных напряжений определяется в соответствии с $k-\omega$ (SST) моделью

турбулентности [7]. Величина турбулентного числа Прандтля определена в соответствии с рекомендациями [8]. Дискретизация уравнений выполнена на основе метода конечных разностей с использованием маршевого счета по продольной координате.

Результаты исследований. Коэффициент трения. Изменение коэффициента трения $c_f/2$ по длине каналов представлены на рисунке 2. Согласно полученным результатам, коэффициент трения снижается по мере нарастания пограничного слоя (увеличения продольной координаты) и увеличения градиента давления (снижения угла раскрытия). Однако снижение $c_f/2$ в APG вызвано по большей части увеличением числа Рейнольдса Re^* (приводящем к снижению коэффициентов трения и теплоотдачи). Снижение числа Маха оказывает противоположное влияние (увеличение поправки на сжимаемость и рост коэффициентов трения и теплоотдачи). Расчетные значения коэффициентов трения совпадают с экспериментальными данными вплоть до скачка уплотнения в пределах неопределенности измерений.

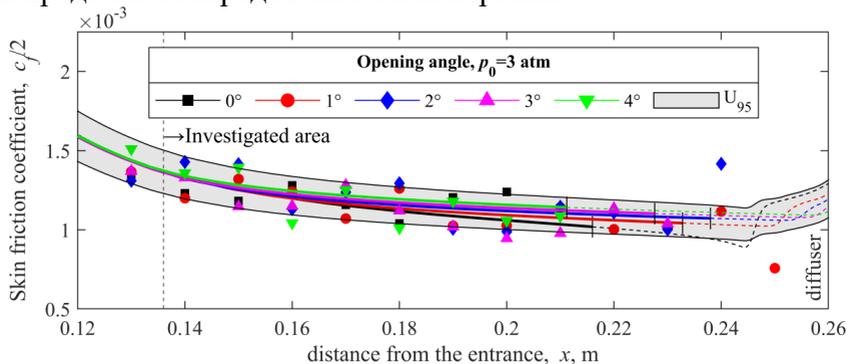


Рис 2. Коэффициент трения в исследуемых каналах

Коэффициент теплоотдачи. При рассмотрении числа Стентона St (рисунок 3) стоит отметить, что на величину St влияет число Маха, β_K и Re^* . В данном случае влияние градиента давления приводит к незначительному снижению

St, несмотря на то, что при снижении числа М поправка на сжимаемость возрастает [9]. Увеличение числа Рейнольдса Re^* к снижению величины St в течении с APG в сравнении с безградиентным течением в том же сечении. В исследуемой области течения до возникновения скачка уплотнения расчетные и экспериментальные значения совпадают.

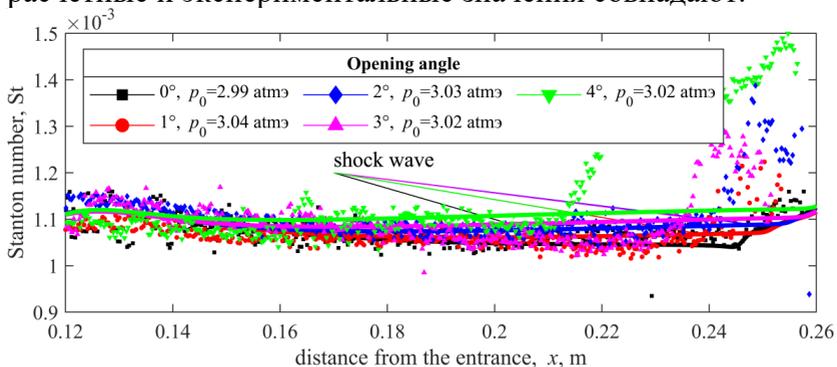


Рис 3. Коэффициент теплоотдачи в исследуемых каналах

Коэффициент восстановления. Расчетные и экспериментальные значения r в исследуемой области течения совпадают и не зависят от градиента давления. Величина коэффициента восстановления соответствует значению для безградиентного пограничного слоя.

Расширенная аналогия Рейнольдса. Для всех исследуемых каналов до начала сверхзвукового участка с APG геометрия идентична. Это определяет сходную предысторию развития пограничных слоев для каналов с различными углами раскрытия (4). Предварительное ускорение в сверхзвуковом сопле, в условиях, когда параметр градиента давления β_K превосходит минимально возможное равновесное значение, приводит к росту коэффициента трения и снижению коэффициента теплоотдачи. Таким образом, еще до начала APG аналогия Рейнольдса нарушается в сторону увеличения трения. Значения фактора аналогии Рейнольдса s на выходе из сопла составляет 0.83, что существенно меньше равновесных значений,

(рисунок 4, а). Можно отметить преобладающее влияние предыстории потока и недостижимость равновесного состояния, соответствующего текущим Re^* и β_K .

По мере развития пограничных слоев величина s возрастает и стремится к своему безградиентному уровню, что является следствием «восстановления» пограничных слоев. Это заметно по относительной величине s , приведенной к равновесной для данного значения β_K и числа Рейнольдса Re^* (рисунок 4, б). Для равновесного пограничного слоя увеличение s достигает 40% относительно безградиентного течения в сечении с той же продольной координатой в исследуемом диапазоне β_K . Согласно экспериментальным и численным результатам в исследуемом канале, фактическое увеличение (относительно величины s в канале с углом раскрытия 3°) существенно ниже и составляет всего 10 %.

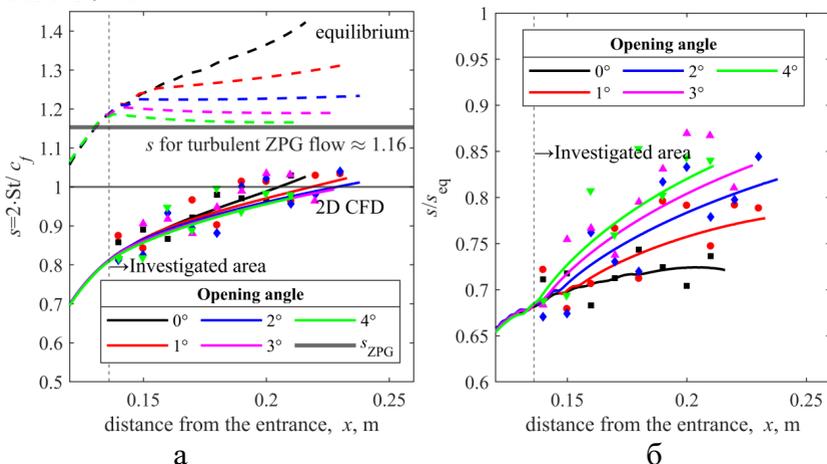


Рисунок 4. Фактор аналогии Рейнольдса в исследуемых каналах: а) абсолютная величина, б) приведенная к соответствующему равновесному значению. Сплошные линии – 2D расчет, пунктирные – решение [3]

Заключение. Проведены экспериментальные исследования влияния APG на параметры теплового и

динамического пограничных слоев в сверхзвуковом щелевом канале. Исследованы 5 каналов с различными геометриями сверхзвуковых участков и одинаковыми сверхзвуковыми соплами. Изменение величины градиента давления реализовывалось за счет наложения геометрического воздействия на сверхзвуковое течение с трением. В качестве параметра градиента давления был принят параметр β_K . Для реализованных в эксперименте параметров потока рассмотрено решение двумерных уравнений турбулентного сжимаемого пограничного слоя с использованием SST модели турбулентности. Получены следующие результаты:

- Наложение APG сопровождается увеличением характерного числа Рейнольдса Re^* , снижением числа M и плотности тока. Это, в свою очередь, оказывает влияние на c_f и St . Происходит снижение коэффициента трения c_f и незначительное снижение коэффициента теплоотдачи St . Изменение St и c_f приводит к росту фактора аналогии Рейнольдса $s=2 \cdot St/c_f$. APG практически не влияет на коэффициент восстановления температуры r .
- Величина фактора аналогии Рейнольдса s растет по мере нарастания пограничного слоя. Однако s в рассмотренных течениях существенно ниже равновесных значений и по мере развития пограничного слоя восстанавливается до значений, соответствующих ZPG. Предельная достигнутая величина фактора аналогии Рейнольдса практически не зависела от β_K и в реализованном в эксперименте диапазоне β_K составила $s \approx 1.0$.
- Определение параметров таких пограничных слоев на основе решений для равновесных пограничных слоев [2,3] невозможно. Параметр градиента давления β_K не позволяет однозначно определения свойств пограничных слоев вследствие его непостоянства и наличия предыстории потока.
- Показана применимость решения уравнений пограничного слоя к рассматриваемому классу задач и

совпадение экспериментальных и численных данных. Использование решения уравнений турбулентного пограничного слоя с соответствующими моделями турбулентности позволяет воспроизводить параметры реальных пограничных слоев.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект №19-79-10213).

Список использованных источников

1. Clauser F.H. Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients // J. Aeronaut. Sci. 1954. Vol. 21, № 2. P. 91–108.
2. Mellor G.L., Gibson D.M. Equilibrium turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1966. Vol. 24, № 2. P. 225–253.
3. So R.M.C. Pressure gradient effects on Reynolds analogy for constant property equilibrium turbulent boundary layers // Int. J. Heat Mass Transf. 1994. Vol. 37, № 1. P. 27–41.
4. Киселёв Н.А., Бурцев С.А., Стронгин М.М. Методика определения коэффициентов теплоотдачи поверхностей с регулярным рельефом // Метрология. 2015. № 3. P. 34–45.
5. Киселёв Н.А., Маластовский Н.С., Здитовец А.Г., Виноградов Ю.А. Экспериментальное исследование теплообмена при течении сжимаемого газа с отрицательным градиентом давления // ТВТ. 2023. Vol. 61, № 4. P. 578–587.
6. Williams J.C. Viscous compressible and incompressible flow in slender channels // AIAA J. 1963. Vol. 1, № 1. P. 186–195.
7. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. California: DCW Industries, Inc. La Canada, 1998.
8. Weigand B., Ferguson J.R., Crawford M.E. An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model // Int. J. Heat Mass Transf. 1997. Vol. 40, № 17. P. 4191–4196.
9. Кутателадзе С.С., Лентьев А.И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия, 1972. 344 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВОЙСТВАМИ

О.П. Королькова

Аннотация. Данная работа посвящена изучению поведения материалов, зависящих от вида внешнего воздействия. Представлены определяющие соотношения, которые позволяют описать это поведение, используя параметр трехосности. Рассмотрена задача продольного сдвига призматического тела квадратного поперечного сечения с прямолинейным разрезом в плоскости сечения из материала с чувствительными к виду напряженного состояния свойствами. Проведено сравнение с задачей о трещине продольного сдвига в рамках классической теории упругости. Продемонстрировано влияние сдвигового деформирования на раскрытие трещины.

Введение. Для описания поведения материала необходимы определяющие соотношения (связь между напряжениями и деформациями), именно поэтому существует огромное множество различных моделей, которые постоянно совершенствуются. Известно, что разрушение материалов зависит от вида напряженного состояния. Например, при растяжении стальные материалы разрушаются, чего не происходит при сжатии. Но для многих материалов такая зависимость проявляется не только при разрушении, но в процессе деформирования.

Зависимость деформационных свойств материалов от вида прикладываемых усилий характерна для большинства гетерогенных материалов. Структурные особенности материалов определяют степень этой зависимости. Чувствительность материалов к виду внешнего воздействия проявляется в отсутствии единой кривой деформирования

(связи между эквивалентным напряжением и эквивалентной деформацией). Данное явление носит название разномодульность, в виду отличия упругих модулей при одноосном растяжении и одноосном сжатии в линейном случае, а при нелинейных диаграммах в виду отличия секущих модулей при их линейной аппроксимации [1-3]. Растяжение и сжатие – это всего лишь два частных способа деформирования, поэтому, если для этих случаев диаграммы отличаются, логично предположить, что и для других видов напряженного состояния диаграммы будут различны. Истинность данного предположения подтверждают экспериментальные исследования свойств конструкционных графитов, бетона, чугуна, теплозащитных материалов, горных пород, композитных материалов и многих других [4, 5].

Определяющие соотношения. При описании деформирования материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, необходимо использовать параметры вида напряженного состояния, один из которых представляет собой отношение гидростатической компоненты напряжений к эквивалентному напряжению:

$$\xi = \sigma / \sigma_0 \quad (1)$$

где $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ – среднее напряжение, $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij} S_{ij}}$ – интенсивность напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ – девиатор напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера. В среднем параметр ξ характеризует соотношение нормальных и касательных напряжений в точке сплошной среды [6].

Зависимость от вида внешнего воздействия можно проиллюстрировать, используя диаграмму деформирования конструкционного графита, полученную при различных видах напряженного состояния [5]. На рис.1 приведены диаграммы зависимости между эффективным напряжением Мизеса и эффективной деформацией $\epsilon_0 = \sqrt{2/3 e_{ij} e_{ij}}$, где $e_{ij} = \epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon \delta_{ij}$ – девиатор деформаций, $\epsilon = \epsilon_{ii}$ – объемная

деформация в случае малых деформаций, для конструкционного графита АРВ, полученные на основе испытаний трубчатых образцов при пропорциональном изменении главных напряжений. Кривая 1 соответствует одноосному растяжению ($\xi = 1/3$), 2 – одноосному сжатию ($\xi = -1/3$). 3 – чистому сдвигу ($\xi = 0$), 4 – равномерному двухосному растяжению ($\xi = -2/3$).

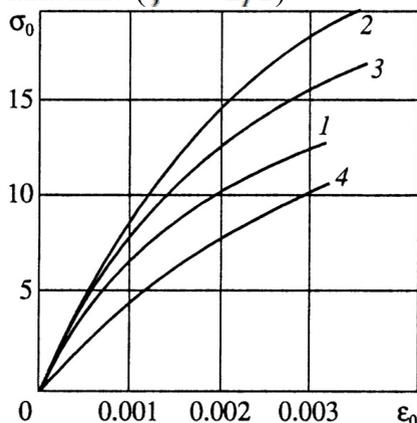


Рис. 1. Эквивалентные диаграммы деформирования структурного графита: 1 - одноосное растяжение, 2 - одноосное сжатие, 3 - сдвиг, 4 - равномерное двухосное растяжение

Как видно из примера, вместо «единой кривой» зависимости $\sigma_0 \sim \epsilon_0$, появляется серия криволинейных диаграмм деформирования даже при малых значениях деформаций. С некоторой долей погрешности в виду слабой нелинейности диаграмм можно использовать их линейную аппроксимацию.

Для определения напряженно-деформированного состояния в телах, свойства которых чувствительны к виду напряженного состояния, могут быть использованы подходы нелинейной теории упругости или деформационной теории пластичности с учетом изменяемости свойств материалов. Тогда при формулировке определяющих соотношений можно

использовать соответствующую потенциальную функцию и представить дополнительную работу в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \zeta(\xi))(A + B\xi^2)\sigma_0^2 \quad (2)$$

где $A=2/3*(1+\nu)/E$, $B=3*(1-2\nu)/E$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Когда $\zeta(\xi) \equiv 0$, получаем потенциал для классического упругого тела. Предполагая, что функция $\zeta(\xi)$ непрерывно дифференцируема, и, без ограничения общности, считая, что в случае чистого сдвига ($\xi = 0$), значение функции $\zeta(0) = 0$. Дифференцируя соотношение (2) по напряжениям, получим связь между напряжениями и деформациями, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{3}{2}\omega(\xi)S_{ij} + \frac{1}{3}\Omega(\xi)\sigma\delta_{ij} \\ \omega(\xi) &= -\frac{1}{2}\zeta'(\xi)(A + B\xi^2)\xi + A[1 + \zeta(\xi)] \\ \Omega(\xi) &= \frac{1}{2}\zeta'(\xi)(A + B\xi^2)/\xi + B[1 + \zeta(\xi)] \end{aligned} \quad (3)$$

Штрихом обозначена производная функции по параметру ξ . Используя (3), можно получить выражения для эффективной деформации и объемной деформации:

$$\varepsilon_0 = [A + \omega(\xi)]\sigma_0 \quad (4)$$

$$\varepsilon = [B + \Omega(\xi)]\sigma$$

Из (4) можно получить выражение, связывающее эффективную деформацию и объемную деформацию:

$$\varepsilon = \frac{B + \Omega(\xi)}{A + \omega(\xi)}\xi\varepsilon_0 \quad (5)$$

Это соотношение означает, что в рассматриваемых материалах процессы объёмного и сдвигового деформирования взаимосвязаны.

На основе анализа экспериментальных данных установлено, что функция $\omega(\xi)$ так же может быть аппроксимирована линейной зависимостью:

$$\omega(\xi) = C\xi \quad (6)$$

В случае если коэффициент $C = 0$, получаем соотношение для классического линейно-упругого тела с упругим потенциалом. Первое соотношение (3) переписется в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}(A + C\xi)S_{ij} + \frac{1}{3}(B\sigma + C\sigma_0)\delta_{ij} \quad (7)$$

Постановка задачи. Элементы многих конструкций работают в условиях сдвиговой деформации, например, фрикционные прокладки, грунты и др., поэтому задача антиплоской деформации (продольного сдвига) является крайне важной. В дальнейшем речь пойдет именно об этой задаче.

Рассмотрим прямое призматическое тело с квадратным сечением с длиной стороны $2a$, представленное на рис. 2. В центре тела имеется прямолинейный разрез длиной $2l$, параллельный верхней и нижней граням. К этим граням прикладывается сдвиговое напряжение τ , параллельно поверхности разреза. Остальные две грани и поверхность разреза свободны от напряжений. Данный вид трещины носит название трещина продольного сдвига. Связь между напряжениями и деформациями определяется соотношением (7).

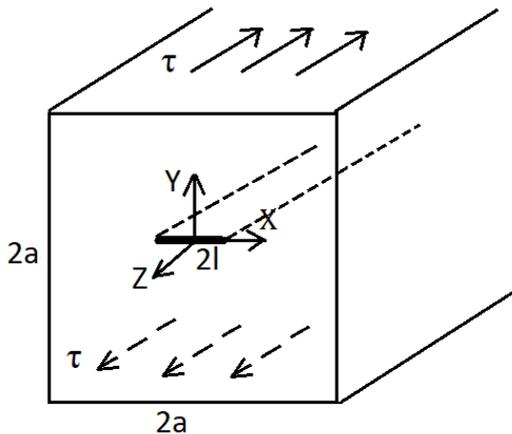


Рис. 2. Трещина продольного сдвига

Решение задачи. Соотношения (7) были переписаны в безразмерном виде. В качестве размерных переменных были выбраны параметры A , a (параметр материала в соотношении (2) и половина длины стороны квадрата). Решение задачи производилось с использованием программно-конечно-элементного комплекса Abaqus с написанием пользовательской модели материала Umat на языке программирования Fortran 77. При численных расчетах были приняты следующие значения для безразмерных параметров: $B/A=5/3$; $l/a=0,2$; $\tau/A=0,001$, $C/A=0,6$.

На рис. 3 – рис. 6 представлены значения для напряжений и деформаций на расстоянии $0,01a$ от вершины трещины, в зависимости от угла Θ , который меняется от -180° на нижнем берегу трещины до 180° на верхнем берегу трещины. На рис. 7 изображена y -компонента перемещений берегов трещины при $x \geq 0$.

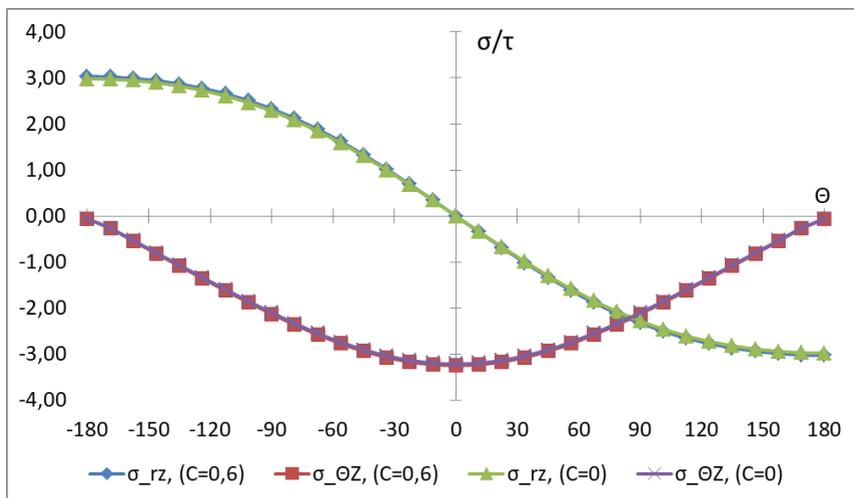


Рис. 3. Значение компонент напряжений σ_{rz} и $\sigma_{\theta z}$ в зависимости от угла возле вершины трещины при $C=0,6$ и 0

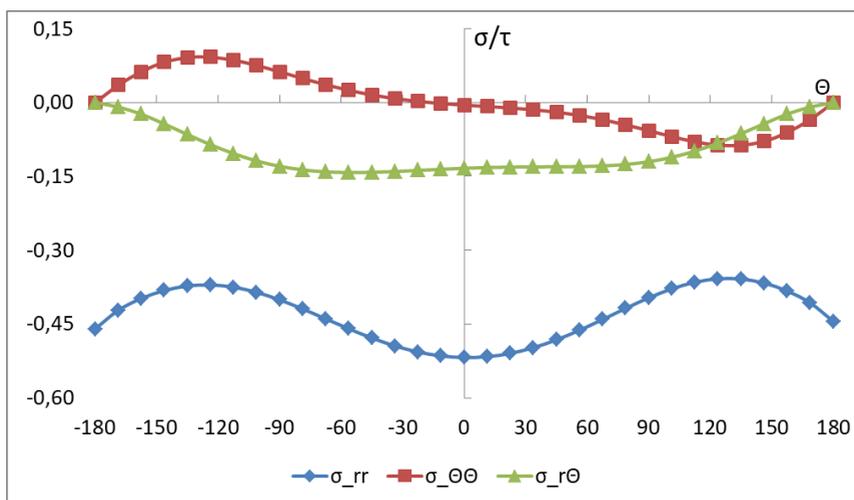


Рис. 4. Значение компонент напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ в зависимости от угла возле вершины трещины при $C=0,6$

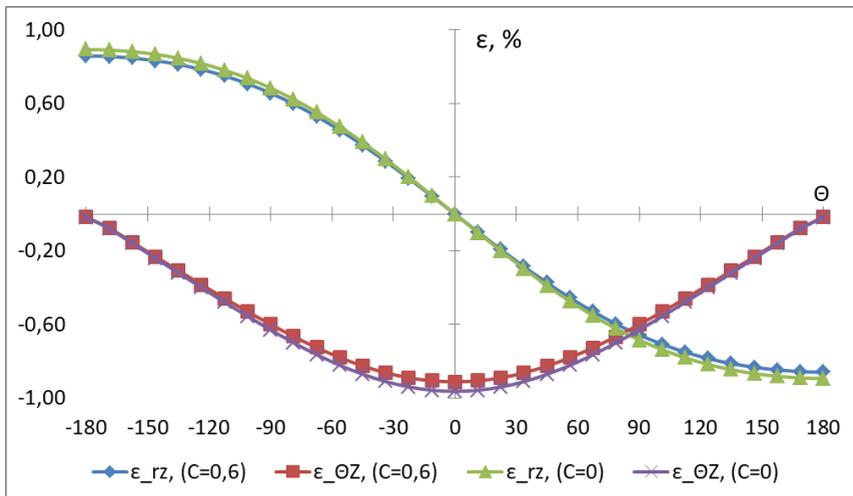


Рис. 5. Значение компонент деформаций ϵ_{rz} и $\epsilon_{\theta z}$ в зависимости от угла возле вершины трещины при $C=0,6$ и 0

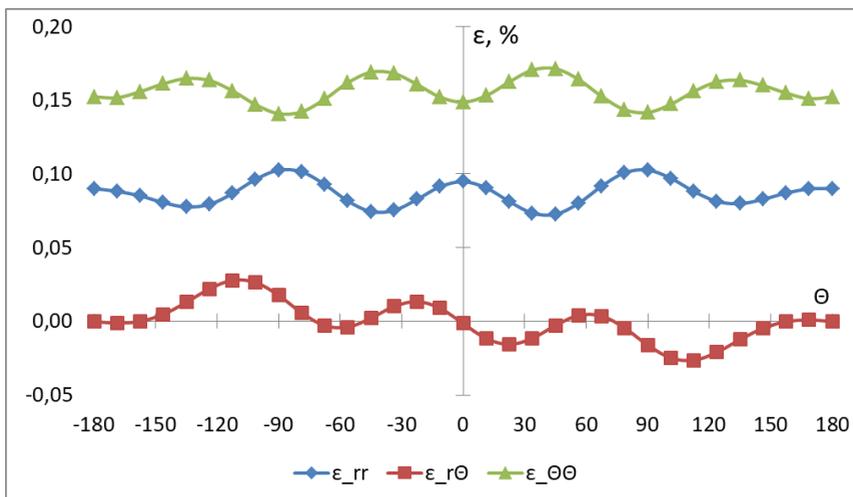


Рис. 6. Значение компонент деформаций ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ и $\epsilon_{r\theta}$ в зависимости от угла возле вершины трещины при $C=0,6$

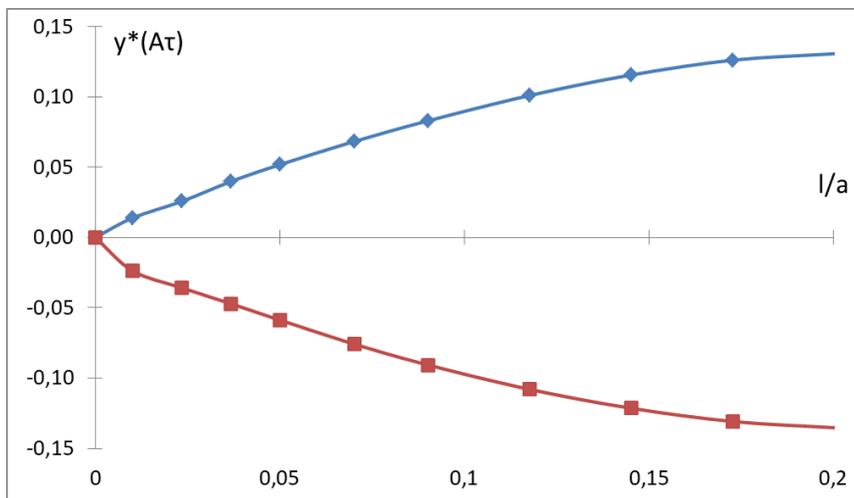


Рис. 7. Перемещения поверхностей трещин в направлении y

Выводы. В качестве основных выводов, полученных в ходе решения задачи, можно выделить следующие:

- касательные z -компоненты напряжений и деформаций с учетом зависимости от вида напряженного состояния практически не отличаются от соответствующих компонент, полученных при использовании классических уравнений теории упругости;
- в отличие от решения задачи классической теории упругости помимо касательных z -компонент ненулевым являются так же компоненты, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси z ;
- происходит раскрытие трещины, чего не происходит при использовании классических уравнений теории упругости;
- решение не является симметричным (антисимметричным) относительно плоскости разреза.

Список использованных источников

1. Jones, R. M. Buckling of circular cylindrical shells with different moduli in tension and compression, 1971a, AIAA J. 9(1), pp. 53–61.
2. Bert C.W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression ASME J Eng Mater Technol, 1977; № 99, pp.344–349
3. Patel, B. P., Khan, K. and Nath, Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels, Composite Structures, № 110, 2014, pp.183–191.
4. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред, Механика твердого тела, 1991, № 6, С. 66-75
5. Белякова Т.А., Ломакин Е.В. Упругопластическое деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния, 2004, № 1, С. 109-118
6. Новожилов В.В. О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности, Прикладная математика и механика, 1952, № 5, С. 615-619

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ CSR-ПОДОБНЫХ ФОРМАТОВ ХРАНЕНИЯ МАТРИЦ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р.М. Куприй

Аннотация. Умножение разреженной матрицы на вектор является важнейшим этапом работы многих численных алгоритмов в широком спектре научных и инженерных приложений. Однако, его производительность намного ниже пиковых значений производительности существующих вычислительных систем. Для повышения производительности этой операции используются специальные методы хранения разреженных матриц. В настоящей работе представлена модификация базового формата Compressed Sparse Row хранения разреженных матриц – Successive Row Incremental Compressed Sparse Row. Эта модификация направлена на уменьшение потребления памяти для хранения номеров столбцов ненулевых элементов матрицы. Разработаны критерий применимости исследуемого формата и теоретические оценки его эффективности. Форматы реализованы в библиотеке численных методов XAMG и протестированы на наборе тестовых задач. Показано, что для операции умножения матрицы на вектор достигается ускорение порядка 1.28 и 1.16 раза при вычислениях с плавающей точкой одинарной и двойной точности. Непосредственно при решении систем линейных алгебраических уравнений использование предложенной модификации приводит к уменьшению времени вычисления примерно на 15% и 10% при использовании одинарной и двойной точности соответственно.

Введение. Численное моделирование физических процессов часто требует решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение

этих СЛАУ может занимать значительную часть общего времени расчета.

Основным вычислительным блоком итерационных методов решения СЛАУ, в том числе известных методов подпространства Крылова [1], является умножение разреженной матрицы на плотный вектор (SpMV): $b = Ax$. Здесь, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ представляет собой разреженную матрицу состоящую из n строк и столбцов, и nnz ненулевых элементов ($nnz \ll n \cdot n$), а $x, b \in \mathbb{R}^n$ – плотные вектора. Разреженные матрицы характеризуются значительным преобладанием числа нулевых элементов над ненулевыми. Значения ненулевых элементов обычно хранятся в отдельном массиве вместе с некоторой дополнительной информацией об их местоположении в матрице. Такой способ организации называется форматом хранения разреженной матрицы.

В отличие от операций с плотными матрицами, операции с разреженными матрицами демонстрируют существенно меньшую вычислительную интенсивность. Она выражается в виде соотношения FLOP-per-Byte: число выполненных операций с плавающей точкой на один байт загруженных данных. Операция SpMV характеризуется очень низким соотношением FLOP-per-Byte, которое обычно находится в диапазоне от 0.1 до 0.25, а также нерегулярным доступом к элементам матрицы и/или вектору сомножителю. Таким образом, операция SpMV требует многократного доступа к памяти для каждой арифметической инструкции, из-за чего производительность этой операции ограничивается пропускной способностью шины памяти вычислительной системы. Эти факторы приводят к тому, что реальная производительность SpMV не достигает даже нескольких процентов от пиковой производительности [2].

Существуют различные подходы для повышения производительности операции SpMV. К ним относятся,

например, разработка специализированных форматов хранения разреженных матриц [3] или вычисления с пониженной точностью [4].

Специализированные форматы хранения используются для эффективного хранения разреженной матрицы в памяти. Эти форматы различаются подходом к хранению информации о расположении ненулевых элементов матрицы, а также сложностью преобразования данных и эффективностью основных операций с данными, упакованными в этом формате.

Одним из наиболее широко используемых и простых форматов хранения разреженных матриц является формат Compressed Sparse Row (CSR) [1]. Этот формат используется в известных библиотеках численных методов, такими как *hupre* или *PETSc*. Другой популярный формат — *ELLPACK (ELL)* [5], который также прост в реализации и больше подходит при использовании графических ускорителей.

Эти форматы просты в реализации, но зачастую далеко не оптимальны. Поэтому было разработано большое количество различных модификаций для повышения эффективности операций с разреженными матрицами. В настоящей работе предлагается модификация формата CSR для хранения разреженных матриц. Предложенная модификация сохраняет простоту представления данных базового формата и реализацию основных матрично-векторных операций, но предлагает более оптимальный способ представления номеров столбцов ненулевых элементов для ряда матриц.

1. Форматы хранения.

1.1. Формат CSR. Формат CSR использует три массива: *Val*, *Col* и *Row* для представления разреженной матрицы. Массив *Val* построчно хранит значения всех ненулевых элементов матрицы, а массив *Col* хранит номера столбцов соответствующих элементов. Размер этих массивов равен количеству ненулевых элементов

матрицы nnz . Массив Row размером $n+1$ содержит смещения первых элементов в каждой строке от начала матрицы, а также общее число ненулевых элементов матрицы. Размер целочисленных типов данных в массивах Col и Row , подходящих для хранения требуемых данных определяется размером матрицы и числом ненулевых элементов соответственно.

1.2. Формат SRICSR. Этот формат направлен на снижение объема памяти для хранения массива Col . Это достигается путем замены исходного массива Col двумя массивами: Col_0 и Col_i . Размеры этих массивов равны n и $nnz-n$ соответственно. В массиве Col_0 хранятся номера столбцов первых ненулевых элементов в каждой строке, а в массиве Col_i хранятся смещения номеров столбцов каждого последующего элемента в строке от предыдущего. Разрядность типа данных, используемого для массива Col_0 определяется размером матрицы, как и для исходного массива Col . Разрядность же массива Col_i может быть ниже, чем у массива Col , она определяется максимальным расстоянием δ между соседними ненулевыми элементами в строке. Во многих случаях это смещение значительно меньше размера матрицы, что позволяет уменьшить разрядность используемого целочисленного типа данных и, таким образом, уменьшить потребление памяти для хранения всей матрицы. В худшем случае, когда массивы Col_0 и Col_i используют тот же тип данных, что и исходный массив Col формата CSR, новый формат потребляет тот же объем памяти, что и основной формат. Критерий применимости этой модификации формата хранения данных можно сформулировать на основе оценки максимального смещения δ . Формат SRICSR обладает всеми преимуществами простоты реализации, высокой скоростью конвертации из стандартного формата CSR и совместимостью с базовым форматом: достаточно загрузить и использовать либо

новые массивы Col_0 , Col_i или исходный массив Col по выбору.

На основе трафика используемых данных можно получить теоретические оценки производительности операции SpMV на основе объема используемых данных:

$$\sum CSR = F \cdot (2 \text{ nnz} + n) + P(\text{nnz}) \cdot (n + 1) + P(n) \cdot \text{nnz}$$
$$\sum SRICSR = F \cdot (2 \text{ nnz} + n) + P(\text{nnz}) \cdot (n + 1) + P(n) \cdot n + P(\delta) \cdot (\text{nnz} - n)$$

Здесь F – разрядность типа данных чисел с плавающей точкой, а $P(x)$ – минимальная возможная разрядность целочисленного типа данных для хранения элемента x .

2. Результаты тестирования. Результаты, представленные в этой статье, были получены на рабочей станции с 8-ядерным процессором Intel Core i7-11700 и двухканальной оперативной памятью DDR4 2933 МГц.

Проведена серия численных экспериментов для оценки достигаемого ускорения с использованием тестовых матриц из коллекции разреженных матриц SuiteSparse Matrix Collection [6]. Эксперименты включают в себя как умножение матрицы на вектор, так и решение систем линейных систем. Более полное описание использованных для тестирования матриц, как и обсуждение проблемы отклонения рекуррентных невязок при решении систем уравнений можно найти в опубликованной ранее статье [7].

2.1. SpMV. Тестирование умножения матрицы на вектор выполнялось для форматов хранения матриц CSR и SRICSR как с одинарной точностью (4 байта, $Fp32$), так и с двойной точностью (8 байт, $Fp64$) чисел с плавающей точкой. Результаты тестирования частично приведены на рисунке 1. Графики показывают отношение времени выполнения операции SpMV в формате CSR и в формате SRICSR, и демонстрируют полученное ускорение вычислений. Кроме того, также показано выполнение сформулированного критерия применимости. Для

матриц, удовлетворяющих критерию применимости наблюдается ускорение в 1.28 и 1.16 раза при выполнении вычислений в одинарной и двойной точности соответственно, что хорошо согласуется с теоретическими оценками.

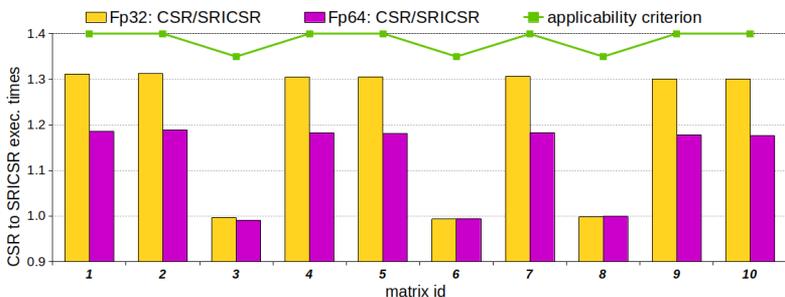


Рис. 1. Отношение времени выполнения SpMV при использовании формата CSR к формату SRICSR в одинарной и двойной точности

2.2. BiCGStab с Multigrid. Второй эксперимент проведен для оценки эффекта применения различных форматов хранения матриц при решении СЛАУ. Итерационные методы подпространств Крылова представляют собой комбинацию матрично-векторных умножений и векторных операций, при этом объем вычислений распределяется между ними практически поровну. Такое распределение указывает на то, что ожидаемое ускорение вычислений может быть ниже, чем при выполнении одной операции SpMV. С другой стороны, построенная иерархия матриц при использовании многосеточного метода содержит несколько десятков матриц, которые можно хранить в модифицированном формате независимо от исходной матрицы, что также усложняет базовые оценки прироста производительности.

Полученные результаты экспериментов частично представлены на рисунке 2. На графике показано отношение времени выполнения расчетов в формате

CSR ко времени расчетов в формате SRICSR. Использование модифицированного формата позволяет ускорить расчеты в 1.09 и 1.16 раза для вычислений двойной и одинарной точности соответственно. Для систем линейных уравнений, чьи соответствующие матрицы не удовлетворяют критерию применимости модифицированного формата, также может быть получено некоторое ускорение вычислений за счёт конвертации матриц нижнего уровня.

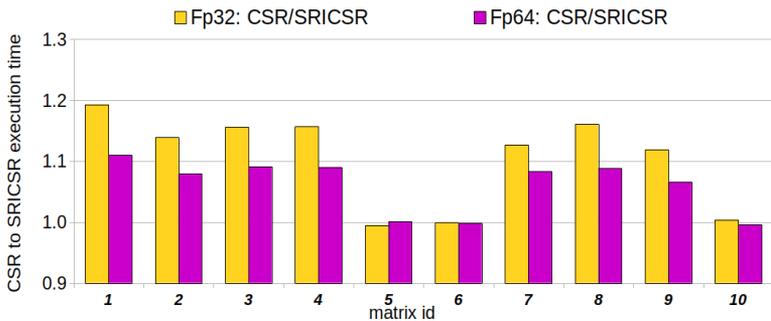


Рис. 2. Отношение времени решения СЛАУ при использовании формата CSR к формату SRICSR в одинарной и двойной точности

3. Заключение. В работе представлена модификация формата хранения матрицы Successive Row Incremental CSR, которая обеспечивает более эффективный подход к хранению номеров столбцов с ненулевыми элементами матрицы. Вместо хранения номеров столбцов формат Successive RICSr сохраняет последовательные приращения номеров столбцов ненулевых элементов в строке.

Форматы хранения матрицы SRICSR реализованы в библиотеке XAMG. Была проведена детальная оценка производительности при использовании нового формата как для SpMV, так и для решения систем уравнений с

использованием подмножества матриц SuiteSparse Matrix Collection. Полученные результаты расчета демонстрируют ускорение в 1.28 и 1.16 раза для чисел с плавающей точкой одинарной и двойной точности соответственно при выполнении операции SpMV. Наблюдаемое ускорение вычислений при решении СЛАУ достигает 15% и 9% при выполнении вычислений одинарной и двойной точности.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-71-10075).

Список использованных источников

1. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems // 2nd edition, SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
2. Williams S., Waterman A., Patterson D., Roofline: An insightful visual performance model for multicore architectures // Communications of the ACM, 2009. V. 52, Issue 5, pp 65-76.
3. SPARSKIT: A basic tool-kit for sparse matrix computations [Электронный ресурс]. URL: <https://www-user-s.cse.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/> (Дата обращения: 02.02.2024)
4. Krasnopolsky B., Medvedev A. Evaluating performance of mixed precision linear solvers with iterative refinement // Supercomputing Frontiers and Innovations, 2021. V. 8, Issue 3, pp 4-16.
5. Kincaid D., Oppe T., Young D. ITPACKV 2D user's guide // Tech report, 1989. URL: <https://www.osti.gov/servlets/purl/7093021> (Дата обращения 08.08.2023)
6. Davis T. A., Hu Y. The university of Florida sparse matrix collection // ACM Trans. Math. Software 2011. V. 38, Issue 1, pp 1-25.
7. Kuprii R.M., Krasnopolsky B.I., Zhukov K.A. Estimating the Effect of Indices Compression in the CSR-like Data Storage Formats for Matrix-Vector Multiplications and Solving Linear Systems // Lobachevskii J Math, 2023. V. 44, pp 3100–3111.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛОКОН МИНЕРАЛОВАТНЫХ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ ПЛИТ

Д.М. Лобачева

Аннотация. В работе исследована математическая модель эмиссии волокон из минераловатных плит под воздействием потока воздуха путем выражения аэродинамической силы через характеристики турбулентных пульсаций и закономерностей течения газа в пограничном слое. Выведено уравнение для плотности потока эмиссии волокон из минераловатных плит. Найдено выражение для коэффициента эмиссии волокон. Выведен критерий допустимой эмиссии волокон из теплоизоляционного слоя в навесной фасадной системе с вентилируемой прослойкой (НФС). Проведена серия экспериментальных работ, моделирующих условия эксплуатации минераловатных теплоизоляционных плит в НФС.

Введение. В последние десятилетия в России в качестве наружной отделки многоэтажных зданий достаточно активно применяются навесные вентилируемые фасады. Они представляют собой систему из защитно-декоративных панелей [1]. Эти панели устанавливаются кронштейнами к несущей стене, в то время как на самой стене закреплен слой утеплителя (рис 1.). В настоящее время в качестве такого материала используются именно минераловатные утеплители.

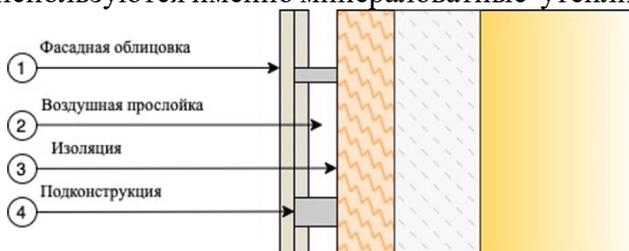


Рис.1. Устройство навесных вентилируемых фасадов

Между утеплителем и облицовкой закладывается воздушная прослойка. Наличие подобной прослойки не позволяет скапливаться избытку влаги в конструкции, но вместе с тем именно из-за такого устройства фасада возникает ряд других вопросов. Если внимательно рассмотреть процессы, происходящие в воздушной прослойке, то можно заметить, что из-за движения воздуха происходит эмиссия волокна. Воздух движется вдоль поверхности минеральной ваты, соответственно на приповерхностные волокна действует аэродинамическая сила. Эта сила вызывает напряжение растяжения в сечении волокна и касательные напряжения в капельках связующего материала, которое скрепляет волокна друг с другом. С течением времени из-за этого возрастают усталостные явления и волокна, отрываясь, вылетают из прослойки.

Математическая модель. Чтобы разобраться в процессе выноса волокна из материала, была разработана следующая математическая модель [2].

Она основывается на предположении, что плотность потока эмиссии прямо пропорциональна изменению массы материала и обратно пропорциональна площади обдуваемой поверхности. Эта зависимость отображена в следующем равенстве:

$$j = -\frac{1}{A} \frac{dm}{dt} = K \frac{\rho_m I F_A}{F_f} \quad (1)$$

где j – плотность потока эмиссии ($\text{кг}/\text{м}^2\text{с}$), A – площадь образца, обдуваемая потоком воздуха (м^2), m – масса исследуемого образца (кг), t – время (с), ρ_m – плотность исследуемого материала ($\text{кг}/\text{м}^3$), F_A – средняя сила аэродинамического воздействия воздуха на приповерхностные волокна (Н), F_f – средняя сила сцепления волокон в материале (Н), K – безразмерный параметр подобия, I – интенсивность турбулентных пульсаций ($\text{м}/\text{с}$), k – энергия турбулентных пульсаций ($\text{Дж}/\text{м}^3$), ρ – плотность воздуха ($\text{кг}/\text{м}^3$).

Однако процесс эмиссии можно рассмотреть и следующим образом. Силу, действующую со стороны потока, удобно представить в виде суммы средней и пульсационной составляющей. Так как поток взаимодействует одновременно со всеми волокнами в приповерхностном слое, можем предположить, что скорость эмиссии пропорциональна средней составляющей аэродинамической силы F_A .

Пульсационная составляющая связана с турбулентными процессами, которые возникают при обдувании шероховатой поверхности. Эта составляющая достаточно хаотична, ее частота меняется в широком диапазоне спектра, что может вызывать резонансные явления в волокнах, что в свою очередь уменьшает коэффициент трения.

Главной характеристикой пульсаций, согласно теории пограничного слоя Шлихтинга [3], является интенсивность, выражение для которой представлено в следующем виде.

$$I = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{\rho}} \quad (2)$$

где k – энергия турбулентных пульсаций (Дж/м³), ρ – плотность воздуха (кг/м³).

Соответственно, разумно предположить, что скорость эмиссии пропорциональна этой составляющей.

Рассмотрим теперь более детально среднюю составляющую аэродинамического воздействия. Она может быть выражена следующей формулой:

$$F_A = 0.5 \rho u_0^2 \delta L C_x \quad (3)$$

где $u_0 = u(h_0)$ – скорость потока воздуха в пограничном слое (м/с), h_0 – толщина активного слоя (м), δ – характерная толщина образца (м), L – характерная длина образца (м), C_x – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления.

При характерной толщине волокон до 0,01 мм и скорости потока до 30 м/с, в нормальных условиях число

Рейнольдса меняется в диапазоне $0,1 \leq Re \leq 20$ [4]. По этим значениям, согласно экспериментальным данным, описанным Шлихтингом, которые были получены при проведении эксперимента по обтеканию цилиндра, коэффициент аэродинамического сопротивления можно аппроксимировать как $C_x = 12,8 Re^{-0,65}$ (рис. 2).

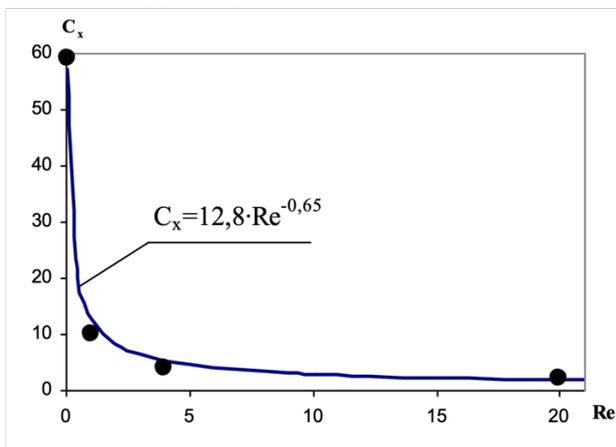


Рис.2. Зависимость коэффициента сопротивления цилиндрического волокна от числа Рейнольдса.

Пользуясь теорией пограничного слоя и вышеперечисленными формулами, подставляя их в первоначальное уравнение для плотности потока эмиссии (1), получаем окончательное уравнение эмиссии волокон, которое отражает зависимость эмиссии от скорости потока воздуха, возведенной в степень 2,35, и плотности материала.

$$j = -\frac{1}{A} \frac{dm}{dt} = \chi \rho_m \left(\frac{U}{U_1} \right)^{2,35} \quad (4)$$

Аналогично, приравнивая имеющиеся формулы для плотности потока эмиссии, получим выражение для коэффициента эмиссии.

$$\chi = K U_1 \frac{6,4 \kappa \rho \delta L}{F_f n} \left(\frac{\mu}{\rho \delta} \right)^2 (Re_1)^{2,35} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{\frac{2,35}{n}} \quad (5)$$

где $n=3-7$ - характеристика наполненности профиля турбулентного пограничного слоя, k – безразмерная постоянная Кармана, U – скорость потока воздуха вне пограничного слоя (м/с), U_1 – характерная скорость, равная 1 м/с.

Значение коэффициента зависит от множества факторов, таких как физические свойства материала, размеры волокон, коэффициент трения и т.д. Главной особенностью этой характеристики является то, что ее можно определить чисто экспериментально.

Эксперимент. Перед проведением эксперимента образцы увлажняются до 10%-го значения влажности по массе, заворачиваются в искусственную пленку и «состариваются» с помощью многократных циклов замораживания и оттаивания в климатической камере. После этого образцы неделю находятся в комнатных условиях, пока не примут сорбционное значение влажности.

Для самого эксперимента по эмиссии волокон в НИИ механики МГУ была изготовлена специальная экспериментальная установка в виде короба, в которой лежат образцы (рис.3).

В торцевой грани короба выполнена щель, через которую происходит вытяжка воздуха, а в противоположном конце – воздухозаборная щель. При включении вентилятора воздух поступает в пространство ящика, а после выносятся вентилятором в окружающую среду.

После начала эксперимента образцы взвешивались раз в неделю, после чего вычисляло абсолютное изменение массы.

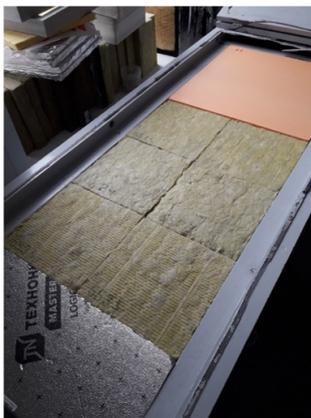


Рис.3. Экспериментальная установка

Результаты. Построенные на основе экспериментальных данных зависимости изменения массы от времени аппроксимируются прямой, что позволяет получить значение плотности потока эмиссии. Ниже приведен график для образца марки DiROCK ЛАЙТ (рис.4).

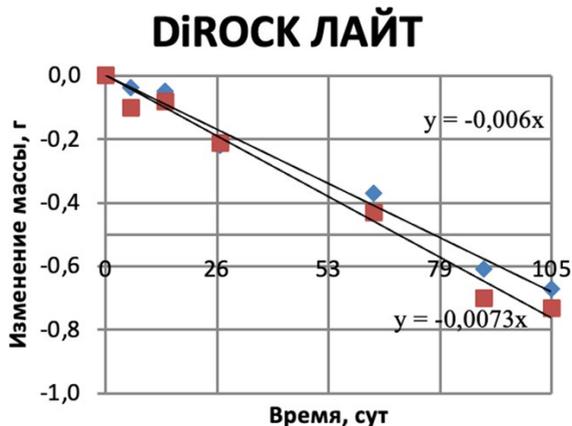


Рис.4. График зависимости изменения массы от времени для DiROCK ЛАЙТ.

Таким образом, коэффициент эмиссии в том числе можно вычислить, исходя только из экспериментальных данных. Теперь, зная это значение, можно получить изменение массы материала через заданный промежуток времени, к примеру, по следующей формуле можно сделать прогноз на 50 лет эксплуатации.

$$(\Delta M)_{t=50} = (50 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) \chi \rho_m \left(\frac{u_{max}}{U_1} \right)^{2,35} \quad (6)$$

Исходя из суммарной эмиссии, можно оценить, как поменяются теплоизоляционные свойства материала, рассчитав по следующей формуле изменение сопротивления теплопередаче к концу срока эксплуатации:

$$\Delta R_0 = \frac{\Delta \delta}{\lambda} = \frac{(\Delta M)_{t=\Delta T}}{\rho_m \lambda} \quad (7)$$

Однако в данной формуле не учтена теплотехническая однородность конструкции. Чтобы рассчитать изменение коэффициента теплопередачи, воспользуемся формулой для расчета приведенного сопротивления. Получим формулу для расчета коэффициента теплопередачи.

$$\begin{aligned} \Delta K &= - \left(\frac{1}{R_{0,1}^{np}} - \frac{1}{R_{0,2}^{np}} \right) \approx \frac{1}{R_{0,1} - \Delta R} - \frac{1}{R_{0,1}} = \\ &= \frac{\Delta R}{(R_{0,1} - \Delta R) R_{0,1}} \approx \frac{\Delta R}{(R_{0,1})^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Допустимость прогнозируемой эмиссии определяется на основании допустимого снижения сопротивления теплопередаче. В качестве критерия возьмем допустимое повышение коэффициента теплопередачи на 5%. Тогда критерий допустимого повышения коэффициента теплопередачи имеет вид:

$$\frac{\Delta K}{K} \leq 0,05 \quad (9)$$

Заключение. Таким образом, в работе была исследована математическая модель эмиссии волокон, выведено уравнение плотности потока эмиссии, найдено

выражение для коэффициента эмиссии волокон и выведен критерий, по которому рассчитывается допустимая эмиссия волокон из материала.

Список использованных источников

1. Гагарин В.Г., Козлов В.В., Лушин К.И., Пастушков П.П. К вопросу о применении ветрогидрозащитных мембран в навесных фасадных системах с вентилируемой воздушной прослойкой // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 3. С. 120–122.
2. Гагарин В.Г., Гувернюк С.В. Математическая модель эмиссии волокон при обдуве воздушным потоком минераловатных изделий и ее использование при прогнозировании долговечности утеплителя вентилируемого фасада // РААСН, Вестник отделения строительных наук. Выпуск 13, том 2. М., 2009, стр. 135-142.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
4. Чорин А.Дж. Завихренность и турбулентность. // В книге Проблемы турбулентности. Сборник переводных работ. Регулярная и хаотическая динамика 2006. С. 209 – 403.

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧЕ НАСТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ КОНФИГУРАЦИИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛ- ГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.А. Петрушов

Аннотация. В задачах математического моделирования часто возникает потребность решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Существует множество численных методов решения СЛАУ со своими ограничениями применимости и рядом настроечных параметров. Характер и степень влияния конкретного параметра зависит от матрицы системы, а выбор его наиболее подходящих значений может обеспечить ощутимое ускорение решения СЛАУ.

При моделировании несжимаемых турбулентных течений возникает необходимость многократного ($\sim 10^4$ – 10^6 раз) решения эллиптической СЛАУ для давления с постоянной матрицей и меняющимися правыми частями. Данный этап занимает доминирующую долю времени моделирования. В некоторых случаях решение системы может осуществляться несколько раз в рамках одного шага по времени. Настройка оптимальных значений параметров методов на начальном этапе расчёта может иметь существенный потенциал для общего ускорения таких расчётов.

В настоящей работе представлены результаты тестирования гибридного алгоритма для автоматизированного подбора оптимальных параметров конфигурации методов решения СЛАУ [1, 2]. Алгоритм представляет собой эволюционную стратегию с применением модели полносвязной нейронной сети (НС). Проведено тестирование алгоритма для трех постановок задач моделирования турбулентных течений, а также для ряда обособленных СЛАУ.

Введение. Несмотря на разнообразие численных методов решения СЛАУ, разработанных на сегодняшний день, ни один метод не обеспечивает наилучшую

производительность во всех случаях. Правильный выбор метода для конкретной задачи остается нетривиальной задачей и требует соответствующей квалификации специалиста. Можно выделить несколько направлений исследований, связанных с автоматизированной оптимизацией решения СЛАУ. К наиболее популярным из них относятся настройка деталей реализации алгоритма для конкретной вычислительной платформы [3, 4], прогнозирование наиболее подходящего численного метода для конкретной СЛАУ [5, 6], и оптимизация конфигурации решателя для последовательности СЛАУ (например, для моделирования переходных процессов) [7, 8]. Данная работа посвящена более тонкой настройке численных методов, а именно процедуре автоматизированного поиска оптимальной комбинации значений настроечных параметров.

Описание алгоритма. Предложенный алгоритм является модификацией эволюционной стратегии — метода оптимизации, основанного на принципах эволюции, мутации и отбора. На первой итерации алгоритм генерирует наборы параметров со случайными значениями из заданных диапазонов. На каждой новой итерации отбирается наиболее эффективный набор (с которым решение СЛАУ заняло наименьшее время) из предыдущей итерации алгоритма, и на основе него составляются новые наборы параметров. При этом часть параметров может меняться относительно их текущих значений (мутации). Также на новой итерации создаются случайные наборы, которые проходят предварительную фильтрацию с помощью модели нейронной сети. Модель нейронной сети обучается на статистике решений модельной СЛАУ малого размера. Схема работы алгоритма представлена на рисунке 1.

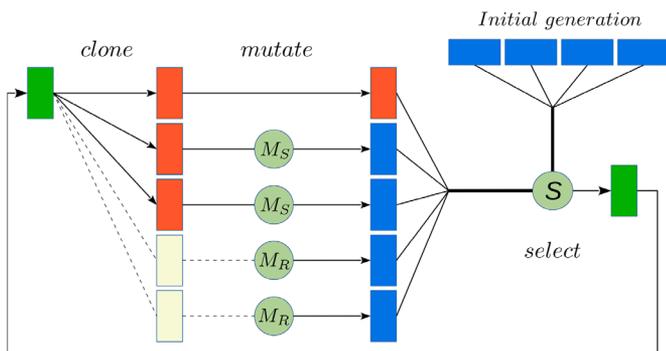


Рисунок 1. Схема работы алгоритма оптимизации

В случае применения алгоритма для ускорения гидродинамических расчетов предполагается следующий сценарий. Проводится стадия оптимизации параметров для одной правой части СЛАУ (например, соответствующей начальному моменту времени) и последующий расчет течения с найденной фиксированной комбинацией параметров. При этом значения параметров численных методов не меняются в процессе моделирования, что обеспечивает воспроизводимость результатов расчета.

Результаты тестирования. Гибридный алгоритм оптимизации параметров решения СЛАУ протестирован в задаче ускорения моделирования несжимаемых турбулентных течений. Тестирование проведено для нескольких расчетных конфигураций:

- 1) плоский канал, сетка 3.58М ячеек, $Re_{\tau} = 180$
- 2) плоский канал с препятствием на стенке, сетка 2.32М ячеек, $Re_b = 3854$
- 3) прямая труба квадратного сечения, сетка 3.44М ячеек, $Re_{\tau} = 150$

Комбинация численных методов включает: решатель BiCGStab, предобуславливатель Classical Algebraic MultiGrid, итерационный метод Чебышева в качестве сглаживателя. Для данной конфигурации рассмотрено

13 настроечных параметров. В таблице 1 приведены результаты работы алгоритма для каждой конфигурации задачи. Приведено значение исходного времени моделирования (значения параметров по умолчанию), время с оптимальной комбинацией их значений, и соответствующее ускорение расчета. При этом в итоговое время включены временные затраты на процесс оптимизации.

Конфигурация задачи	Исходное время моделирования, мин	Итоговое время моделирования, мин	Ускорение
Плоский канал	231	127	1.82
Канал с препятствием	1007	674	1.5
Прямая труба	283	264	1.07

Таблица 1. Результаты применения алгоритма оптимизации в процессе моделирования турбулентного течения

Эффективность работы алгоритма также протестирована для 13 систем из набора Suite Sparse Matrix Collection (SSMC) и представлена на рисунке 2. Результаты приведены для набора из 21 параметра конфигурации численных методов и для нескольких предобученных моделей НС. Среднее ускорение решения СЛАУ составило 2.3. Для 6 систем значительное повышение эффективности работы алгоритма достигнуто за счет использования нейронной сети, предварительно обученной на модельной задаче.

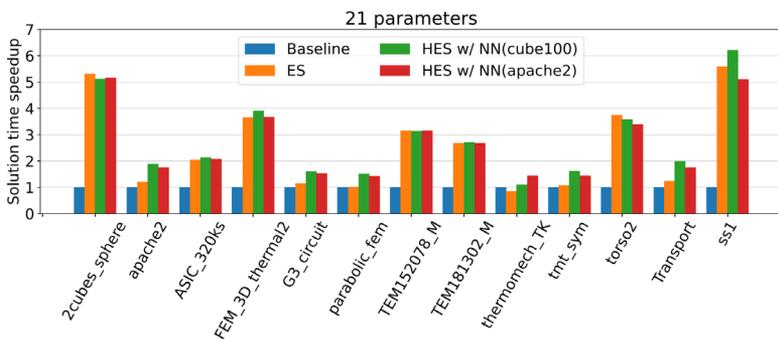


Рисунок 2. Результаты ускорения решения 13-ти СЛАУ из набора SSMC

По результатам тестирования показано, что предварительно обученные модели НС могут быть успешно применены для оптимизации различных целевых СЛАУ на разных вычислительных платформах. Показано, что увеличение количества настраиваемых параметров не всегда приводит к более оптимальному результату: рост числа всевозможных комбинаций параметров замедляет поиск их подходящего сочетания.

Заключение. В работе представлены результаты тестирования алгоритма оптимизации параметров конфигурации методов решения СЛАУ. Подход применен для ускорения моделирования несжимаемых турбулентных течений в различных постановках задач. Время моделирования при этом удалось сократить вплоть до 45% с учетом затрат на сам процесс оптимизации. Для 13 систем из набора SSMC среднее ускорение составило 2.3. Проведенные тесты демонстрируют потенциал предложенного алгоритма, позволяющего значительно уменьшить время решения целевой СЛАУ, выполнив при этом в процессе оптимизации порядка 100 тестовых решений. Показана возможность эффективного переиспользования предобученной модели нейронной сети.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ
№ 18-71-10075.

Список использованных источников

1. A. Petrushov, B. Krasnopolsky. Automated tuning for the parameters of linear solvers. *Journal of Computational Physics* 494 (2023), <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112533>

2. A. Petrushov, B. Krasnopolsky. Tuning Soft Mutations of the Evolution Algorithm for Optimizing the Linear Solver Parameters. *Lobachevskii Journal of Mathematics* 44, 3148–3159 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1995080223080450>

3. R. Vuduc, J.W. Demmel, K.A. Yelick, Oski: a library of automatically tuned sparse matrix kernels, *J. Phys. Conf. Ser.* 16 (2005) 521.

4. H. Ülo. Dinkelbach, B.-E. Bouhlal, J. Vitay, F.H. Hamker, Auto-selection of an optimal sparse matrix format in the neuro-simulator ANNarchy, *Front. Neuroinform.* 16 (2022).

5. E. Jessup, P. Motter, B. Norris, K. Sood, Performance-based numerical solver selection in the Lighthouse framework, *SIAM J. Sci. Comput.* 38 (2016) S750–S771.

6. J. Demmel, J. Dongarra, V. Eijkhout, E. Fuentes, A. Pettit, R. Vuduc, R. Whaley, K. Yelick, Self-adapting linear algebra algorithms and software, *Proc. IEEE* 93 (2005) 293–312

7. L. McInnes, B. Norris, S. Bhowmick, P. Raghavan, Adaptive sparse linear solvers for implicit CFD using Newton-Krylov algorithms, in: K. Bathe (Ed.), *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*, Elsevier Science Ltd, Oxford, 2003, pp. 1024–1028.

8. P.R. Eller, J.-R.C. Cheng, R.S. Maier, Dynamic linear solver selection for transient simulations using machine learning on distributed systems, in: *2012 IEEE 26th International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops PhD Forum*, 2012, pp. 1915–1924.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ВИРТУАЛЬНЫХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ХОДЬБЫ С НАГРУЗКОЙ

А.С. Резанова

Аннотация. Носимые роботизированные устройства – экзоскелеты – могут помочь восстановлению подвижности людей при потере мобильности, а также снизить риск травм при ходьбе с нагрузкой.

В данной работе использовалось скелетно-мышечное моделирование для расчёта влияния вспомогательных устройств на мышечную активность нижних конечностей и затраты при ходьбе с тяжёлыми нагрузками, а также произведено сравнение с результатами для усложненной модели коленного сустава.

Введение. Общие вопросы моделирования походки антропоморфных шагающих роботов, управление движением их звеньев в одноопорной и двухопорной фазах рассматривались в [1]. В качестве механической модели шагающего человека мог служить плоский пятизвенный антропоморфный механизм [2] как с шарнирами без трения, так и с дополнительными пассивными диссипативными элементами, которые могли привести к значительному улучшению стабильности [3]; были разработаны алгоритмы управления квазистатической ходьбой одиннадцатизвенного экзоскелета [4]; проведён анализ запириания-освобождения колена в экзоскелете в случае походок ударного и безударного типов [5].

В данной работе использовалось скелетно-мышечное моделирование, изучалось влияние на затраты и активность мышц при ходьбе с тяжёлыми нагрузками идеальных устройств – актуаторов – без массы, каждое из которых обеспечивало неограниченный крутящий момент с одной степенью свободы в одном направлении, что дало

возможность сравнения их влияния независимо друг от друга. Рассматривалось пять актуаторов – три бедренных (отведение, сгибание, вращение бедра), коленный и на сгибание голеностопного сустава. Также для сравнения в модель был добавлен связочный аппарат коленного сустава.

Моделирование. Выполнено с помощью открытой платформы OpenSim 4.3, в которой содержится трёхмерная модель скелетно-мышечной системы, основанная на 21 трупе и 24 молодых здоровых людях [8], содержащая 39 степеней свободы, 8 из которых в данной постановке заблокированы как незначительные (двусторонний выворот голеностопного сустава, сгибание пальцев ног, отклонение и сгибание запястья). Также используется модель мышц Милларда [6] и модель метаболических затрат [7].

Из открытого доступа взяты экспериментальные данные траекторий 41 маркера захвата движения (motion capture) одного цикла ходьбы: без нагрузки со свободно выбранной скоростью и при переносе в рюкзаке и с тяжёлым жилетом 38 кг с той же скоростью. В эксперименте были собраны силы и моменты реакции грунта с частотой 2000 Гц. Для изучения вспомогательных устройств использовалось только нагруженное состояние.

Исполнительные механизмы — приводы, т.е. мышцы и вспомогательные актуаторы — функции одного или нескольких элементов управления. Это крутящие моменты, приложенные между двумя телами вдоль общей оси, силы, приложенные между двумя точками, определенными на двух отдельных телах, или их комбинация, а также внешний управляющий сигнал — активация, которым может быть напряжение на моментном двигателе или само напряжение между двумя точками. Ключевым свойством является расчет и приложение сил и моментов к связанным телам на основе их контрольного значения и общего состояния модели:

$$f_i(t) = a(t)f_i(t)^{opt}, \quad (1)$$

где i — номер мышцы/привода, $a_i(t)$ — функция активации (контрольное значение), $f_i(t)^{opt}$ — оптимальная (максимальная) сила привода. Для мышц $a_i \in [0.01, 1]$, значение $a_i = 1$ соответствует полной активации мышцы.

Для масштабирования базовой в OpenSim виртуальной модели скелетно-мышечной системы под конкретного пациента сравнивались данные экспериментальных маркеров с заложенными модельными маркерами с помощью инструмента Scaling.

С учётом исходных данных и отмасштабированной модели были сгенерированы траектории углов суставов, инструментом Inverse Kinematics (ИК), который проходил через каждый временной интервал экспериментальных данных и располагал модель в позе, которая для этого временного шага минимизирует сумму взвешенных квадратов ошибок маркеров и координат.

$$\min_q \left[\sum_{i \in \text{марк.}} w_i \|x_i^{exp} - x_i(q)\|^2 + \sum_{j \in \text{незад. коорд.}} \omega_j \|q_j^{exp} - q_j\| \right] \quad (2)$$

q — вектор решаемых ИК обобщённых координат, для которых x_i^{exp} — экспериментальное положение маркера i ,

$x_i(q)$ — позиция соответствующего маркера модели;

w_i, ω_j — веса маркеров и координат, фиксированны.

Заданная (фиксированная) координата q_i — это обобщенная координата, ей присвоено точное значение траектории. Незаданная координата q_j — координата, чьё значение вычисляется с помощью ИК. Ошибка координаты — разница между значением координаты, вычисленным с помощью ИК и экспериментальным значением. Ошибка маркера — это расстояние между экспериментальным маркером и соответствующим маркером на модели, при позиционировании с использованием обобщенных координат, вычисленных решателем ИК. С ошибками связаны веса, указывающие, насколько сильно они должны быть сведены к

минимуму. Большие веса присвоены маркерам, находящимся наиболее близко к костям как к более надёжным, в то время как меньшие веса заданы маркерам, расположенным за мягкими тканями, например, на бедрах и голени, чьи колебания во время ходьбы вносят ошибку.

Расчёт мышечных сил. Использовался алгоритм Computed Muscle Control в OpenSim, для нахождения профилей сил устройства, которые минимизировали сумму квадратов мышечных активаций, одновременно отслеживая измеренную кинематику ходьбы с нагрузкой без посторонней помощи. Затем изучалась экономия, обеспечиваемая каждым актуатором, соответствующие профили сил и результирующие изменения в мышечной активности.

С помощью алгоритма Computed Muscle Control [9] вычислены уровни мышечного возбуждения, которые изменяют обобщенные координаты (например, углы суставов) динамической модели скелетно-мышечной системы к желаемой кинематической траектории. Отслеживались только анатомические углы суставов, поскольку движение таза определялось реакциями стопы и пола.

Сначала вычислялись желаемые ускорения $\ddot{\mathbf{q}}^*$, которые, по достижении, приводили координаты модели \mathbf{q} к экспериментальной кинематике \mathbf{q}^{exp} и $\dot{\mathbf{q}}^{exp}$ по закону:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}^*(t + T) = \ddot{\mathbf{q}}^{exp}(t + T) + k_v[\dot{\mathbf{q}}^{exp}(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)] + \\ \quad + k_p[\mathbf{q}^{exp}(t) - \mathbf{q}(t)], \\ k_v = 2\sqrt{k_p}, \end{cases} \quad (3)$$

где k_v и k_p – коэффициенты прироста ошибок скорости и положения, выбраны значения $k_v = 20$ и $k_p = 100$ из [9]. Поскольку прикладываемые к телу мышечные силы не изменялись мгновенно, желаемые ускорения вычислялись для шага вперед по времени $T = 0,01$ с. — интервал, с которым применялся алгоритм, достаточный для изменения сил.

Затем вычислялись элементы управления приводами — активации a_i следующим образом. Силы, создаваемые при нулевом и полном возбуждении, давали оценки f_i^{min} и f_i^{max} диапазона мышечно-сухожильных сил f_i (1), которые могут быть достигнуты в момент $t + T$, обеспечивающих желаемые ускорения $\ddot{q}^*(t + T)$. Затем использовалась оптимизация для вычисления вместе с набором ограничений по всем k суставам набора желаемых мышечно-сухожильных сил \vec{f}_i^{opt} в пределах допустимого диапазона, которые минимизируют целевую функцию J для устранения избыточности (перегрузки) мышц [10] по алгоритму

$$\begin{cases} J = \sum_i a_i^2 \rightarrow \min, \\ \ddot{q}_k^* - \ddot{q}_k = 0 \quad \forall k. \end{cases} \quad (4)$$

Первая сумма реализует неформальный принцип: если мышца может не работать, то она и не должна. Вычисленные силы \vec{f}_i^{opt} при вводе в системные уравнения движения создают желаемые ускорения \ddot{q}^* и минимизируют функцию стоимости. Активации поддерживались постоянными, в то время как численное интегрирование полных уравнений состояния системы использовалось для перевода всех состояний в $t + T$.

Вспомогательные приводы добавлялись по отдельности: всем актуаторам приписывалась оптимальная сила $f^{opt} = 1$, а исследуемому на несколько порядков больше, чтобы значительную часть нагрузки он взял на себя, имея таким образом подобранное оптимизатором небольшое контрольное значение a_i . В частности, $f_{актуатор}^{opt} = 1000$, потому что при меньших соотношениях влияние актуаторов было незначительным.

Для получения более близкой к реальности модели в коленный сустав вручную добавлены связки, представленные как тонкие нити с двумя точками крепления.

Результаты расчётов. Из графиков зависимостей сил мышц от времени при добавлении в систему актуаторов по

отдельности, нашлось три актуатора, наиболее эффективно уменьшающих амплитуду мышечных сил в естественной походке - актуатор сгибания бедра для напрягателя широкой фасции (*TFL*) и подвздошной (*iliacus*) мышц, вращения бедра для тонкой (*gracilis*), полумембранной (*semimembranosus*) и поясничной (*psoas*) мышц, и актуатор лодыжки для полусухожильной (*semitendinosus*) и икроножной (*soleus*) мышц. Выяснилось, что наиболее эффективная комбинация актуаторов — добавление в систему трёх наиболее уменьшающих амплитуды сил — на сгибание (*hip adduction*) и на вращение бедра (*hip flexion*) и актуатор лодыжки (*ankle*).

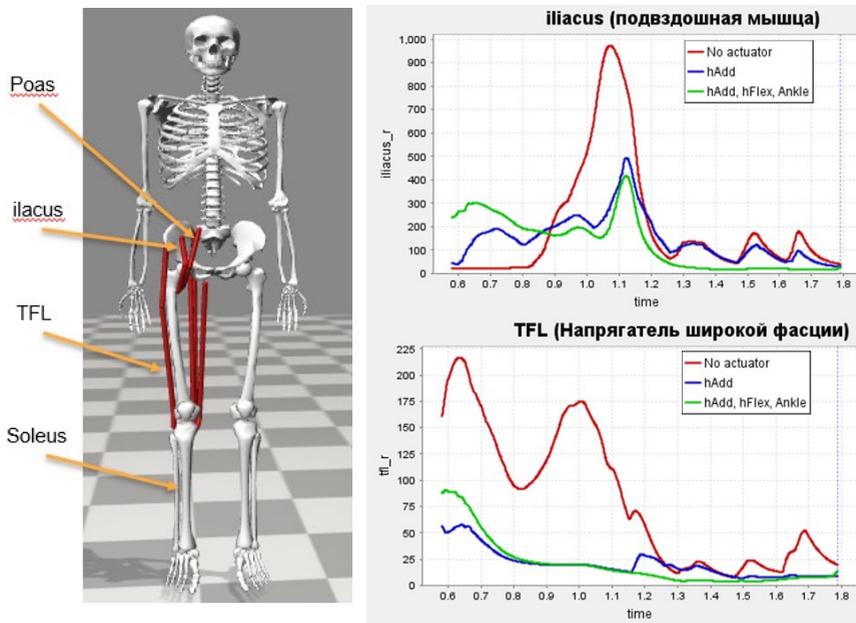


Рис.1 Графики зависимостей сил мышц *iliacus* и *TFL* в нагруженном состоянии без актуаторов (*No actuator*), при добавлении в систему наиболее эффективного для этих мышц актуатора (*hip adduction*) и при комбинации трёх наиболее эффективных актуаторов.

На графиках показаны зависимости сил мышц в случае с нагрузкой с наиболее показательным изменением амплитуд за один цикл походки. Сравнение без добавления актуаторов,

с наиболее эффективным для данной мышцы актуатором и с комбинацией трёх наиболее эффективных актуаторов всех мышц. Заметно, что влияние этой комбинации практически не отличается от влияния одного наиболее эффективного актуатора для конкретной мышцы.

За цикл ходьбы происходит электрическая активность мышц — есть периоды, в которые мышцы физиологически не активируются мозгом [11], что в данной модели не учтено. Этим эффектом можно объяснить отличие естественной походки от нагруженного движения при комбинации трех самых эффективных актуаторов (рис.2), что может влиять на комфортность и устойчивость движения в экзоскелете.

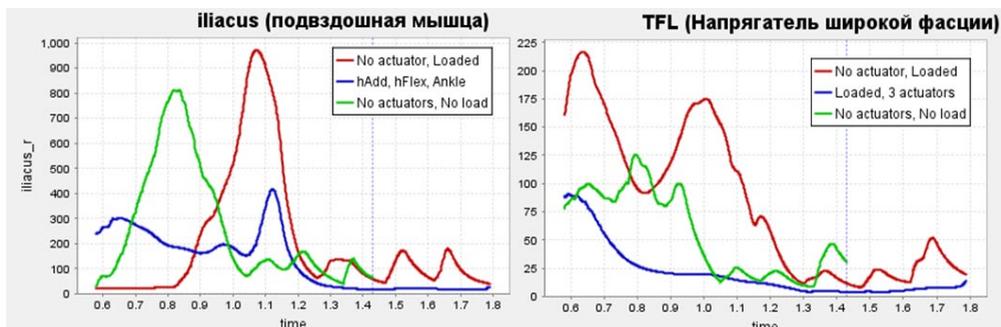


Рис.2 Сравнение расчёта нагруженного состояния без вспомогательных элементов (“No actuator, Loaded”) и с наиболее эффективной комбинацией актуаторов (“Loaded, 3 actuators”), а также без них в ненагруженном состоянии (естественная походка, “No actuator, No load”) для мышц с наиболее наглядным изменением амплитуд.

Заключение. Реализовано моделирование внедрения виртуальных вспомогательных устройств в суставы нижних конечностей. Исследовано влияние нагрузки и вспомогательных устройств на силу мышц нижних конечностей при ходьбе. Показано, что вспомогательное устройство для одной группы мышц может влиять на нагрузки другой группы мышц. Создание комбинации мощностей актуаторов и функции их переключения в цикле ходьбы для предотвращения мышечного переутомления, повышения

эффективности физической нагрузки и профилактики травматизма, имитации наиболее естественного движения требует дальнейшего изучения.

Благодарность Александре Сергеевне Юровой.

Список использованных источников

1. Формальский А.М., Велерштейн Р.А. Передвижение антропоморфного механизма (со стопами) при импульсных воздействиях. I. Одноопорная фаза. // Изв. АН СССР. МТТ. 1979, №5. II. Двухопорная фаза. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980, №1,41-47.
2. Колесникова Г.П., Формальский А.М. Об одном способе моделирования походки человека. // Инженерный журнал: наука и инновации, 2014, №1.
3. Goswami A., Thuilot B., Espiau, B. A study of the passive gait of a compass-like biped robot: symmetry and chaos // International Journal of Robotics Research, 1998, т. 17 № 12.
4. Ворочаева Л.Ю., Яцун А.С., Яцун С.Ф. Управление квазистатической ходьбой экзоскелета на основе экспертной системы. // Тр. СПИИРАН, 2017, №52, 70–94
5. Лавровский Э. К., Письменная Е. В. О походках оператора в пассивном экзоскелете нижних конечностей при использовании режима закрепленного колена. // Мехатроника, автоматизация, управление, Том 21, № 1, 2020, 34-42.
6. Millard M, Uchida T, Seth A, Delp SL. Flexing computational muscle: modeling and simulation of musculotendon dynamics. // J Biomech Eng. 2013; 135: 021005.
7. Umberger BR, Gerritsen KGM, Martin PE. A model of human muscle energy expenditure. // Comput Methods Biomech Biomed Engin. 2003; 6: 99–111.
8. Rajagopal A, Dembia C, DeMers M, Delp D, Hicks J. Full body musculoskeletal model for muscle-driven simulation of human gait. // IEEE Trans Biomed Eng. 2016; 63: 2068–2079.
9. Thelen, D.G. and Anderson, F.C. Using computed muscle control to generate forward dynamic simulations of human walking from experimental data. // J. Biomech., 2006, 39(6): 1107-1115
10. Happee, R., 1994. Inverse dynamic optimization including musculardynamics, a new simulation method applied to goal directed movements. // Journal of Biomechanics 27, 953–960
11. А.С.Витензон, К.А.Петрушанская От естественного к искусственному управлению локомоцией (рис.72) – М.: МБН. 2003

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВДАВЛИВАНИЯ КЛИНА В ПЛАСТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А.Ю. Рябина

Аннотация. Работа посвящена исследованию задачи о вдавливании клина в пластическое полупространство и анализу изменения зёрненной структуры в этом процессе. На машине Zwick100kN проводились эксперименты по вдавливанию стального клина в медные образцы с различным размером зерна. Осуществлен метод DIC, с помощью которого было построено поле деформаций на торце образца. Для изучения изменения микроструктуры образцов были выполнены шлифовка и травление.

1. Постановка и решение задачи. В несжимаемое жестко-пластическое полупространство с постоянной скоростью вдавливается абсолютно твердый клин; трение отсутствует. При такой постановке можно считать, что полупространство испытывает плоскую деформацию. Решение данной задачи было найдено Хиллом [1].

Решение построено на предположении об автомодельности процесса. Полагается, что новая граница материала (по каждую сторону клина) состоит из отрезка и луча. Тогда зона пластичности представляет собой два равнобедренных прямоугольных треугольника, соединённых центрированным веером (Рис.1).

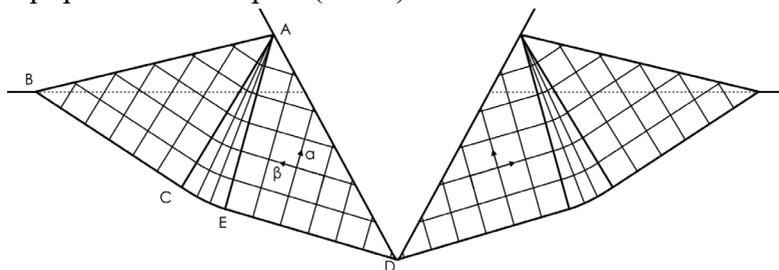


Рис.1. Зоны пластичности по Хиллу

Хиллом были проведены эксперименты по вдавливанию клина в свинец. Результаты показывают (Рис.2), что граница материала действительно хорошо аппроксимируется отрезком, однако зона пластичности, в целом имея форму, предсказанную теорией, немного распространяется под клин.

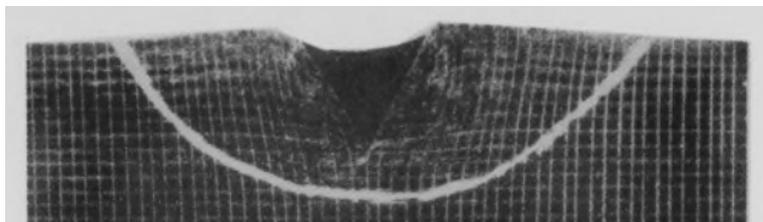


Рис.2. Опыт Хилла со свинцом

2. Проведение опытов. В рамках настоящей работы было проведено 3 эксперимента по вдавливанию стального клина с углом раствора 60° в медь. Испытания проводились на установке Zwick100kN.

Были проведены опыты по одноосному растяжению меди, из которых видно, что она является пластически упрочняемым материалом, следовательно, решение Хилла можно использовать лишь для сравнительного анализа.

3. Эксперимент №1. Используемый медный образец оказался недостаточно широким, что привело к сдвигу материала вбок (Рис.3), а не выдавливанию вверх.

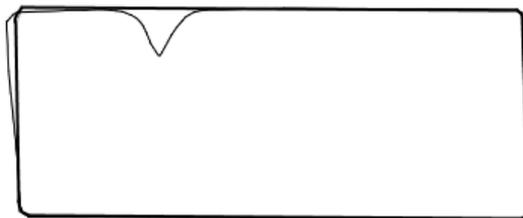


Рис.3. Тонкая линия – образец после вдавливания, толстая – до

Тем не менее были выполнены шлифовка и травление образца для изучения его микроструктуры. Предположительно, в образце был некий дефект, после травления проявивший себя как полоса из тёмных черточек (Рис.4). Если предположить, что до вдавливания полоса была горизонтальной, то по её изгибу можно примерно определить области пластичности. Видно (Рис.4), что они не совпадают с теорией: зона пластичности довольно узкая и распространяется под кончик клина, граница зоны подходит к клину под углом примерно 60° вместо теоретических 45° .

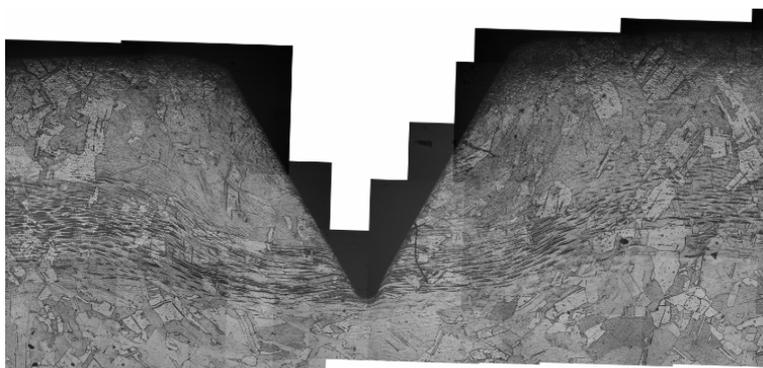


Рис.4. Образец под микроскопом

Помимо этого замечено, что след от острия клина не совпадает по форме с самим клином. На рис.5 темными линиями показаны продолжения сторон клина, а белой – след, оставленный в меди. Остриё клина и след должны находиться внутри острого угла, образованного линиями, однако с правой стороны след выходит за его пределы. Можно предположить, что после извлечения клина материал дополнительно сжимается.

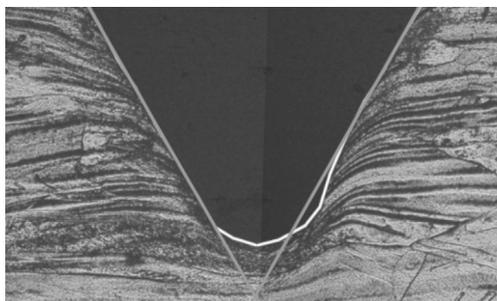


Рис.5. След острия

4. Эксперимент №2. Во втором эксперименте образец был вставлен в стальную канавку, чтобы материал не сдвигался как в первом опыте. Видно (Рис.6), что свободная граница меди поменяла форму, но не так, как предполагалось теорией.

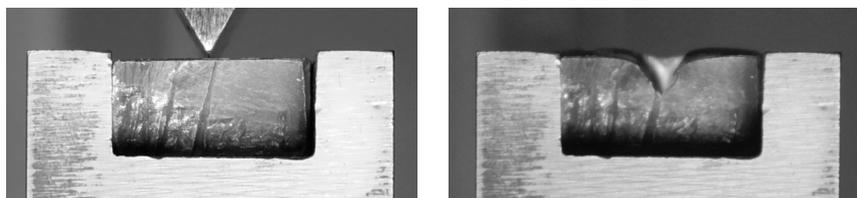


Рис.6. Образец до и после нагружения

Как и в предыдущем эксперименте зона пластичности распространяется под клин и по форме не соответствует теории. Так же след острия опять оказался больше самого острия (Рис.7).

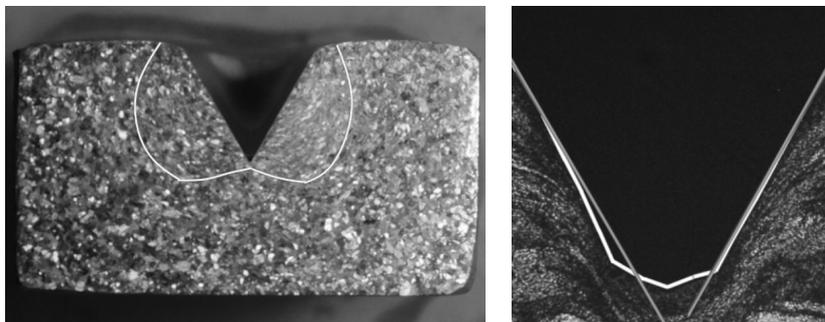


Рис.7. Примерная зона пластичности и след острия

5. Эксперимент №3. В третьем эксперименте образец был достаточно широким, чтобы материал не сдвигался в сторону. Новая форма границы (в середине образца) похожа на отрезок и луч, однако отрезок оказался короче, чем предсказано теорией.

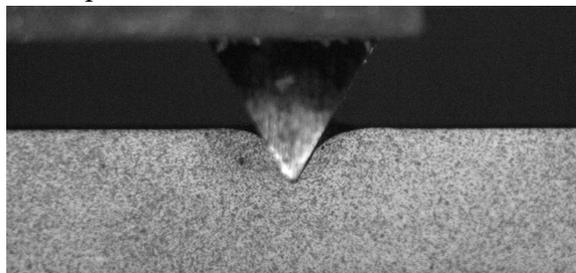


Рис.8. Образец после нагружения

С помощью метода DIC были получены деформации на торце образца. Видно (Рис.9), что картина не является автомодельной: в начале под клином существует цельная область, но со временем она делится на две. Такой результат позволяет предположить, что и внутри образца автомодельности не будет. Однако надо учитывать, что деформация на торце не является плоской, поскольку материал может свободно двигаться вперед (Рис.10).

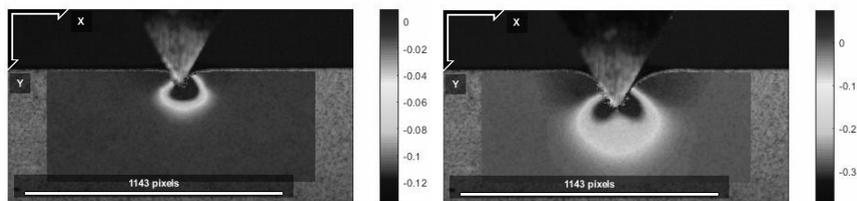


Рис.9. ϵ_{yy} в начале и в конце нагружения



Рис.10. Торец образца после нагружения

Медь, из которой изготовлен данный образец, была мелкозернистой, из-за чего на снимке с микроскопа не удаётся разглядеть даже примерную границу зоны пластичности. Но видно (Рис.11), что пластичность распространяется под клин, и след от острия снова больше, чем должен быть.

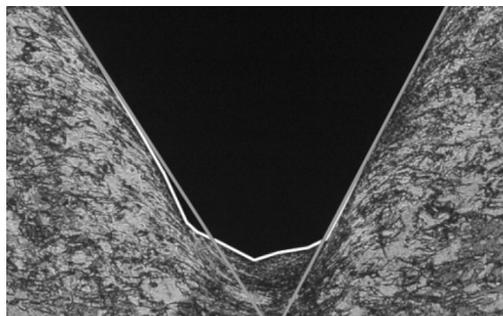


Рис.11. След острия

6. Выводы и планы. Пока что не получилось увидеть соответствие поведения металла в эксперименте с теорией: зона пластичности имеет другую форму, ровно, как и новая граница материала. Также обнаружено, что след от острия клина не совпадает по форме с самим остриём, и сделано предположение об отсутствии автономности.

Стоит провести эксперименты на образцах из других металлов, детальней изучить влияние размера зерна на процесс нагружения, попробовать использовать метод DIC для визуализации деформаций точек внутреннего сечения, а также попробовать объяснить эффект, возникающий в кончике клина после его извлечения.

Список использованных источников

1. Качанов Л. М. // Основы теории пластичности, 1969, 217-222.

РЕЖИМЫ ВЫТЕСНЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ ПЛАСТА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

И.М. Сытченко

Аннотация. В работе оценивается эффективность хранения углекислого газа, закачиваемого через вертикальную скважину в водонасыщенный пласт. Исследуется зависимость эффективности хранения в зависимости от введенных критериев подобия. Дана оценка влияния капиллярного давления на эффективность хранения CO_2 .

Введение. Вопрос хранения антропогенного углекислого газа в нефте- и водонасыщенных пластах с каждым годом становится все более актуальным [1, 2, 3]. Закачка CO_2 в пласт сопровождается образованием газового плюма, форма и размеры которого могут сильно варьироваться в зависимости от физических параметров пласта: толщины, вертикальной и горизонтальной проницаемостей. На форму газового плюма также влияют вязкости CO_2 и воды (нефти), разница плотностей, капиллярное давление, и другие параметры. Например, если вертикальная проницаемость пласта на несколько порядков выше горизонтальной проницаемости, под влиянием гравитационных сил большая часть плюма будет располагаться под кровлей пласта, тем самым нижние слои пласта не будут охвачены газом. В ситуации, когда вертикальная проницаемость, наоборот, на несколько порядков меньше горизонтальной, газ в меньшей степени будет подвержен влиянию гравитационной сил, и, тем самым, нижние слои пласта будут задействованы в процессе вытеснения. Оценка надежности хранения CO_2 проведена в терминах микроскопической, объемной и совокупной эффективностей вытеснения [4,5].

Основные уравнения. Ниже представлена система уравнений для двухфазного течения несжимаемых жидкостей i (CO_2) и d (H_2O) в поле силы тяжести с учетом

капиллярного давления [6,7]. Плотности ρ_i и вязкости μ_j , $j = i, d$, жидкостей считаются постоянными.

$$\phi \frac{\partial s_j}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad j = i, d \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{K} \frac{k_{rj}}{\mu_j} (\nabla p_j - \rho_j \mathbf{g}), \quad j = i, d \quad (2)$$

$$p_i - p_d = p_c(s_i) \quad (3)$$

$$s_i + s_d = 1 \quad (4)$$

$$p_c(s_i) = p_{c,max} s_i \quad (5)$$

$$k_{ri}(s_i) = k_{ri,max} s_i^2 \quad (6)$$

$$k_{rd}(s_i) = (1 - s_i)^2 \quad (7)$$

Здесь ϕ – пористость, s – насыщенность, p_j – давление в j -ой фазе, k_{rj} – относительная фазовая проницаемость, \mathbf{u} – скорость Дарси, ∇ – оператор набла, p_c – капиллярное давление, $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_h, k_h, k_z\}$ – тензор абсолютной проницаемости, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, $k_{ri,max}$ и $p_{c,max}$ – константы, задающие максимальные значения относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления соответственно.

Уравнение (1) – закон сохранения массы, (2) – закон Дарси, уравнения (3) и (4) – замыкающие соотношения для давлений и насыщенностей фаз. Функции капиллярного давления и относительный фазовых проницаемостей в зависимости от насыщенности s_i задаются уравнениями (5)–(7).

Уравнения для расчета локального коэффициента вытеснения (8), коэффициента объемного охвата (9) и сводной эффективности (10) хранения CO_2 приведены ниже.

$$E_d = \frac{V_i}{V_i + V_*} \quad (8)$$

$$E_v = \frac{V_p}{V_p + V_{bp}} \quad (9)$$

$$E_s = E_d E_v \quad (10)$$

Здесь V_i - объем пор на микроуровне, который уже заполнен жидкостью i ; V_* - объем пор на микроуровне, который можно заполнить; V_p - объем порового пространства, охваченного жидкостью i ; V_{bp} - объем под плюмом, заполненный жидкостью d .

Постановка задачи. Рассматривается бесконечный однородный пласт постоянной толщины H (Рис. 1). В начальный момент времени, $t = 0$, пласт полностью заполнен более тяжелой жидкостью d , $s_i = 0$. Давление распределено гидростатически: $p_d = p_0 + \rho_d g z$, p_0 - давление на глубине $z = 0$. При $t > 0$, более легкая жидкость i с постоянным объемным расходом Q закачивается через одиночную скважину, перфорированную по всей глубине пласта, $0 \leq z \leq H$. Верхняя и нижняя границы пласта считаются непроницаемыми.

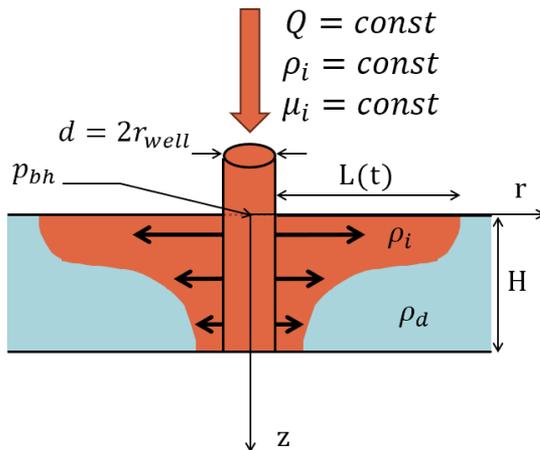


Рис. 1. Схема задачи. Оранжевым цветом обозначена зона двухфазного течения (плюм). Голубым цветом показана область, насыщенная жидкостью d .

Безразмерные переменные и критерии подобия.

В данной задаче введены следующие безразмерные величины:

$$L = \sqrt{\left(\frac{Qt_Q}{\Phi\pi H}\right)} \quad (11)$$

$$t_Q = \frac{\Phi\pi L^2 H}{Q} \quad (12)$$

$$t_{grav} = \frac{\Phi H \mu_d}{k_z \Delta \rho g} \quad (13)$$

$$p_Q = \frac{Q \mu_d}{\pi k_h H}, p_Q = \Delta \rho g H, p_{cap} = p_{c,max} \quad (14)$$

Так как в задаче нет фиксированного размера вдоль оси r , вводится зависящая от времени закачки длина L (11), соответствующая расстоянию, на который распространяется плюм жидкости i за время t_Q (12) при поршневом вытеснении. Также в задаче есть характерное время t_{grav} (13), за которое пузырек более легкой жидкости i под действием гравитационных сил поднимается от подошвы пласта до его кровли. В уравнении (14) представлены три характерных давления: перепад давления p_Q , вызванный закачкой жидкости i , разница давлений p_{grav} на границах пласта $z = 0$ и $z = H$, разница давлений p_{cap} , связанная с капиллярными силами.

Введем следующие критерии подобия:

$$\Gamma = \frac{t_{grav}}{t_Q} = \frac{Q \mu_d}{\pi k_z \Delta \rho g L^2} \quad (15)$$

$$Gr = \frac{p_Q}{p_{grav}} = \frac{Q \mu_d}{\pi k_h \Delta \rho g H^2} \quad (16)$$

$$\Pi = \frac{p_{cap}}{p_{grav}} = \frac{p_{c,max}}{\Delta \rho g H} \quad (17)$$

Критерий подобия Γ (15) характеризует влияние гравитационных сил на течение в пористой среде. Чем меньше Γ , тем больше влияние этих сил. При увеличении

времени Γ уменьшается. Критерии подобия Gr (16) и Π (17) описывают характерные значения давления, связанные с теми или иными процессами, от времени закачки не зависят.

Результаты расчетов. Расчеты проводились с использованием симулятора MUFITS [8]. Размеры расчетной области – 400, 100 и 1 ячейка по осям r , z , θ соответственно, толщина и длина пласта – 20м и 2500м. Разница плотностей жидкостей i и d постоянна и равна $\Delta\rho = 250$ кг/м³. Для достижения необходимого диапазона значений критериев подобия в рамках каждого расчета варьировались Q , k_z , k_h , t_Q и $p_{c,max}$.

Проведены две серии расчетов для параметра $\Pi = 0,1$ и $\Pi = 10$. Полученные значения эффективностей E_d , E_v и E_s объединены на графиках в зависимости от критериев подобия Gr и Γ (Рис. 2). В каждом индивидуальном расчете критерий подобия $Gr = const$, в то время как критерий подобия Γ уменьшается со временем.

При фиксированном Gr (то есть в рамках одного расчета) локальный коэффициент вытеснения E_d увеличивается с уменьшением Γ (с увеличением времени). Так как влияние гравитационных сил увеличивается со временем, область $s_i > 0$, в которой вычисляется микроскопическая эффективность, становится меньше. Весь объем закачанной жидкости i скапливается у кровли пласта, и E_d становится больше.

Коэффициент объемного охвата E_v , напротив, при фиксированном Gr уменьшается с уменьшением Γ (с увеличением времени). Так как на начальном этапе закачки ($\Gamma \gg 1$) и при $Gr \gg 1$ влияние гравитационных сил мало, жидкость i равномерно вытекает из скважины. Тем самым, достигается максимальное значение V_p для используемого интервала скважины. В случае больших значений Gr для закачки используется весь интервал скважины

и безразмерный объем плюма $V_p \approx 1$, а $V_{bp} \approx 0$, поэтому максимальные

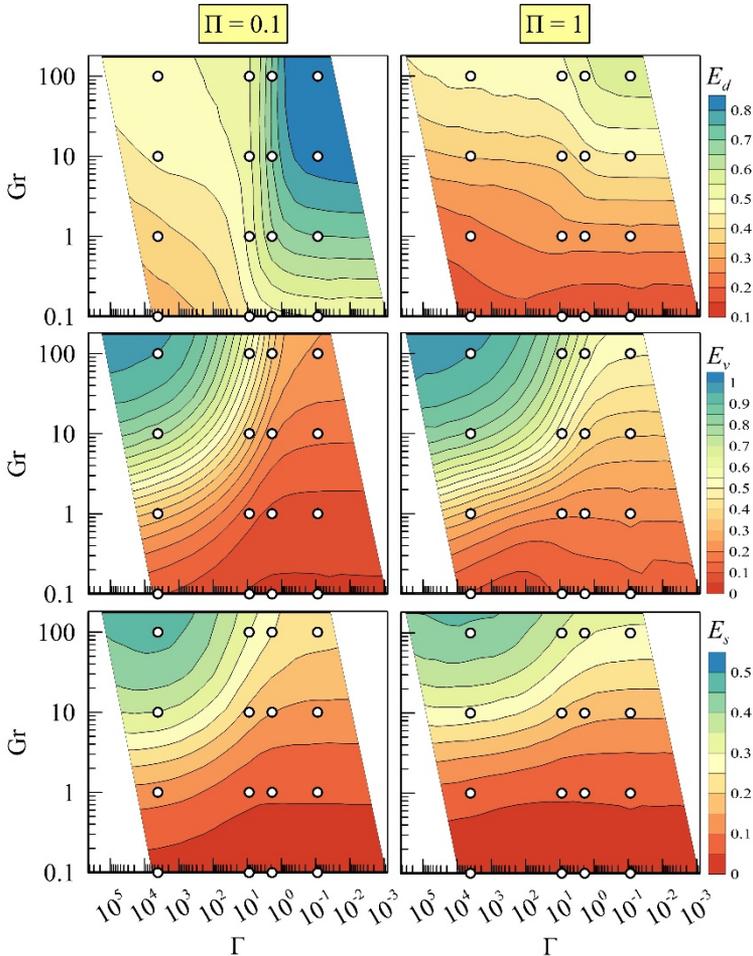


Рис. 2. Карты рассчитанных эффективностей E_d , E_v и E_s при $\Pi = 0,1$ и 1 .

значения E_v , близкие к 1, достигаются при $\Gamma \gg 1$ и $Gr \gg 1$.

Сводная эффективность E_s , равная произведению микроскопической и объемной эффективностей, в рамках одного расчета, $Gr = \text{const}$, меняется слабо в зависимости

от Γ . Однако, наблюдается сильная зависимость от критерия Gr . Наибольшие значения совокупной эффективности E_s получены при наибольших значениях Gr .

Влияние капиллярного давления оценено посредством изменения критерия подобия Π . При большем Π двухфазная область течения становится шире. Таким образом значения микроскопической эффективности E_d при фиксированных Gr и Γ , но большем $\Pi = 1$, значительно ниже, чем при тех же Gr и Γ , но меньшем $\Pi = 0,1$. Капиллярные силы также влияют на объемную эффективность E_v . Плюм распространяется дальше, и, хотя объем области $s_i > 0$ увеличивается, эффективность E_v снижается. Качественно карты совокупной эффективности E_s для $\Pi = 0,1$ и $\Pi = 1$ отличаются мало. С количественной точки зрения закачка в пласт с меньшим влиянием капиллярного давления выгоднее.

Заключение. Получены карты рассчитанных эффективностей E_d , E_v и E_s для двух случаев максимального капиллярного давления, соответствующих значениям $\Pi = 0,1$ и $\Pi = 1$ в широких диапазонах изменения критериев подобия $Gr \in [0,1; 100]$ и $\Gamma \in [10^{-3}; 10^6]$. Наиболее эффективное размещение CO_2 в рамках данной задачи соответствует закачке в пласт при значениях критериев подобия $Gr \gg 1$, $\Gamma \gg 1$ и $\Pi \ll 1$.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 19-71-10051.

Список использованных источников

1. Bickle, M.J., 2009. Geological carbon storage. Nature Geo-science 2, 815–818.
2. Eiken, O., Ringrose, P., Hermanrud, C., Nazarian, B., Torp, T.A., Høier, L., 2011. Lessons Learned from 14 years of CCS Operations: Sleipner, In Salah and Snøhvit. Energy Procedia 4, 5541–5548.

3. Jiang, T., Pekot, L.J., Jin, L., Peck, W.D., Gorecki, C.D., Worth, K., 2017. Numerical Modeling of the Aquistore CO₂ Storage Project. *Energy Procedia* 114, 4886–4895.

4. Goodman, A., Hakala, A., Bromhal, G., Deel, D., Rodosta, T., Frailey, S., Small, M., Allen, D., Romanov, V., Fazio, J., Huerta, N., McIntyre, D., Kutchko, B., Guthrie, G., 2011. U.S. DOE methodology for the development of geologic storage potential for carbon dioxide at the national and regional scale. *International Journal of Greenhouse Gas Control* 5, 952–965.

5. Afanasyev, A., Penigin, A., Dymochkina, M., Vedeneeva, E., Grechko, S., Tsvetkova, Y., Mikheev, I., Pavlov, V., Boronin, S., Belovus, P., Osiptsov, A., 2023a. Reservoir simulation of the CO₂ storage potential for the depositional environments of West Siberia. *Gas Science and Engineering* 114, 204980.

6. Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик, Движение жидкостей и газов в природных пластах, Недра, Москва, 211 стр., 1984.

7. А. И. Брусиловский, Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа, М.: "Грааль", 575 с., 2002.

8. <http://mufits.org/>

ДИНАМИКА НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С ГРУЗОМ НА КОНЦЕ

Д.А. Храмов

Аннотация. В данной работе проводится численное и экспериментальное моделирование процессов смотки и размотки тяжелой идеальной однородной нерастяжимой нити в пространстве без среды в плоском случае. Актуальность исследований обусловлена задачами современной космонавтики: использование тросовых систем для борьбы с космическим мусором, транспортировки грузов, объединения модулей в космическую станцию. Проводится валидация численного моделирования на экспериментально полученных траекториях центра масс груза в процессе сматывания нити.

Введение. С древних времён тросы, канаты, нити являются одним из основных конструктивных элементов многих механизмов. Математическое моделирование движения нити, как одномерного объекта в пространстве, нашло множество приложений к практическим задачам текстильной и военной промышленности, а в последнее время предпринимаются попытки использовать тросовые системы в космосе для спуска капсул с орбит или устранения космического мусора. Для исследования возможности реализации таких процессов с помощью тросовых систем, было проведено множество успешных экспериментов, например: TSS1 и TSS1-R, YES и YES2 и др. В ходе эксперимента YES2 была предпринята успешная попытка размотка троса длиной 32 километра с целью демонстрации и получения верификационных данных процесса доставки груза с орбиты [1]. В результате верификации математической модели и анализа процесса размотки троса стало понятно, что такие процессы чувствительны к начальным параметрам запуска и ещё необходимо учитывать эффекты, связанные с

распространением волн возмущения в нити и их отражением от границ [2-4]. В связи с чем остаётся актуальной потребность в моделирование движение нити в подобных процессах для последующего использования в космических миссиях.

Моделирование пространственного движения нити является сложной математической задачей, поскольку во многих приложениях длина нити, и характерное время достаточно велики, а уравнения, описывающие движение нити являются нелинейными [5,6]. Для широкого круга прикладных задач нить можно считать нерастяжимой. При этом моделирование её движения сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений, дополненной алгебраическим уравнением, с изменяющейся во времени областью решения. У этой задачи не только множество приложений к практике, но и сама по себе она является интересной с точки зрения математического моделирования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу сматывания идеальной однородной нерастяжимой тяжёлой нити, подающейся через кольцо-приёмник (рисунок 1. BC). Основная часть нити, находящаяся в свободном движении, подаётся через приёмник и сматывается на узел смотки. Будем считать, что точка нити, переходящая из свободного движения в кольцо-приёмник является одним концом (рисунок 1. точка B), соответственно второй конец находится в свободном движении (рисунок 1. точка A). То есть длина исследуемого участка АВ свободного движения нити меняется со временем t . Относительно неподвижной системы координат наблюдателя $Oxyz$ (ось z перпендикулярна плоскости рисунка) движение происходит в плоскости Oxy в поле сил тяжести с массовой плотностью $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_x$.

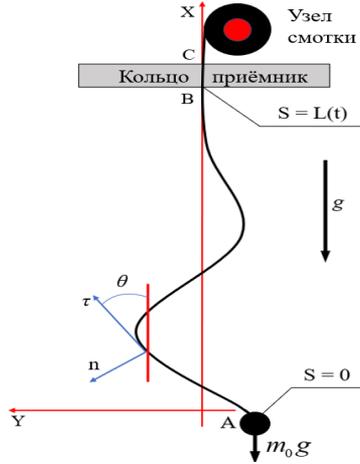


Рисунок 1. Иллюстрация моделируемого процесса.

2. Математическая модель. Уравнения движения идеальной однородной нерастяжимой нити имеют следующий вид в векторной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (T \boldsymbol{\tau})}{\partial s} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{\tau}^2 = 1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Где t и s – независимые переменные: время и лагранжева координата точек нити (длина дуги), ρ_0 – линейная плотность нити, $\boldsymbol{\tau}(s, t)$ – касательный вектор

к точкам нити (рис. 1), $\mathbf{v}(s, t)$ – вектор скорости точек нити $\theta(s, t)$ – угол между векторами $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{e}_x .

Запишем уравнения системы (1) в проекциях на оси естественного репера к точкам нити:

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad \mathbf{v} = (v_\tau \boldsymbol{\tau}, v_n \mathbf{n}),$$

$$\tau: \begin{cases} \frac{\partial v_\tau}{\partial t} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial S} - g \cos \theta, \\ \frac{\partial v_\tau}{\partial S} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial S} = 0. \end{cases} \quad n: \begin{cases} \frac{\partial v_n}{\partial t} + v_\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{T}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial S} + g \sin \theta, \\ \frac{\partial v_n}{\partial S} + v_\tau \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \end{cases}$$

Вдоль характеристических направлений уравнения можно записать в полных дифференциалах, замыкая систему уравнением, содержащим функцию натяжения из касательной проекции:

$$\begin{cases} dv_\tau - v_n d\theta = 0 : t = \text{const} \\ dv_n + v_\tau d\theta = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho_0}} d\theta + g \sin \theta dt : \dot{S} = \pm \sqrt{\frac{T(S, t)}{\rho_0}} \\ \frac{\partial T}{\partial S} = \rho_0 \left(\frac{\partial v_\tau}{\partial t} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial t} + g \cos \theta \right) \end{cases} \quad (2)$$

Движение свободного конца нити $S = 0$ описывается уравнениями движения центра масс грузика А:

$$\tau: \frac{\partial v_\tau}{\partial t} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{T}{m_0} - g \cos \theta, \quad n: \frac{\partial v_n}{\partial t} + v_\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} = g \sin \theta. \quad (3)$$

Границе В, где $S = L(t)$, неподвижна, а значит для материальных точек нити, проходящих через точку В координата y равна нулю, а касательная скорость v_τ определяется угловой скоростью смотки $\omega(t)$ и радиусом катушки R_0 . Отсюда получим:

$$S = L(t): \quad v_n = 0; \quad v_\tau = R_0 \omega(\tau). \quad (4)$$

При этом известен закон изменения длины исследуемого участка АВ:

$$L(t) = L_0 + R_0 \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Начальные условия в общем случае можно задать произвольными:

$$t = 0: \nu(s, 0) = \varphi_0(s), \quad \theta(s, 0) = \psi_0(s). \quad (6)$$

Перейдём к безразмерным переменным:

$$\tilde{s} = \frac{s}{L_0}; \quad \tilde{L}(t) = \frac{L(t)}{L_0}; \quad \tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{L_0/g}}; \quad \tilde{v}_* = \frac{v_*}{\sqrt{L_0 g}};$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{m_0 g}; \quad \tilde{\omega}(\tau) = \sqrt{L_0/g} \omega(\tau),$$

и далее опустим знак волны (при этом помним, что решаем в безразмерных переменных). Получим окончательную формулировку задачи уравнений (2) с граничными условиями (3) и (4), соотношением (5) и начальными условиями (7):

$$\left\{ \begin{array}{l} dv_\tau - v_n d\theta = 0, \quad t = const; \\ dv_n + v_\tau d\theta = \pm \sqrt{\frac{m_0 T}{L_0 \rho_0}} d\theta + \sin \theta dt; \\ \frac{m_0}{L_0 \rho_0} \frac{\partial T}{\partial S} = \frac{\partial v_\tau}{\partial t} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial t} + \cos \theta; \\ S = L(t): \quad v_n = 0; \quad v_\tau = -\frac{R_0}{L_0} \omega(t); \\ S = 0: \quad \tau: \frac{\partial v_\tau}{\partial t} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial t} = T - \cos \theta, \quad n: \frac{\partial v_n}{\partial t} + v_\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} = \sin \theta; \\ t = 0: \nu(s, 0) = \varphi_0(s), \quad \theta(s, 0) = \psi_0(s) \\ \quad (\nu(s, 0) = 0, \quad \theta(s, 0) = \theta_0), \\ \quad L(t) = 1 + \frac{R_0}{L_0} \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (7)$$

3. Валидация численного моделирования.

Для проведения экспериментального исследования процесса смотки тяжёлой нити были созданы мобильные экспериментальные установки, в которых нить может сматываться через покоящийся кольцо-приёмник (рис. 2). В качестве нити была выбрана монофильная нейлоновая леска диаметра равным 0.20 миллиметра.

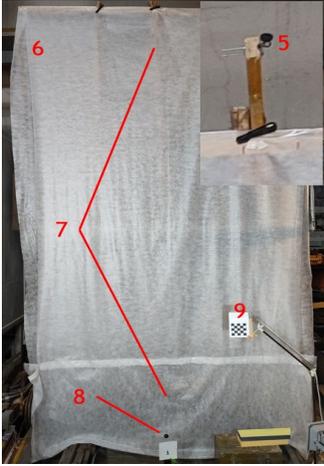


Схема экспериментальной установки.

1 – мотор-редуктор; 2 – аккумулятор; 3 – катушки различного диаметра; 4 – полированное керамическое кольцо; 5 – кольцо приёмник; 6 – фоновое полотно; 7 – доска; 8 – грузик на свободном конце лески; 9 – нормировочная сетка.

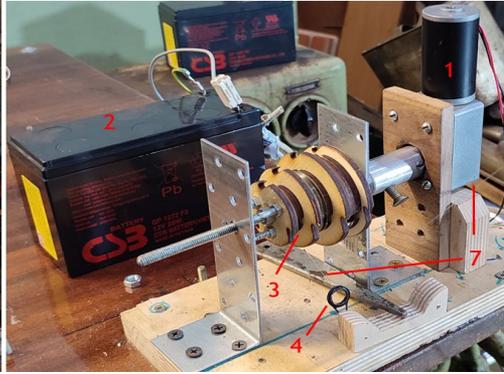


Рисунок 2. Схема экспериментальной установки.

Результатом проведения экспериментов является видеозапись, в которой мы наблюдаем движение грузика на свободном конце нити. Для обработки видеозаписей была создана программа в среде разработки LabVIEW. В результате обработки предварительно подготовленного пакета кадров видеозаписи мы имеем в точности траекторию движения центра масс груза (примеры представлены на рис. 3).

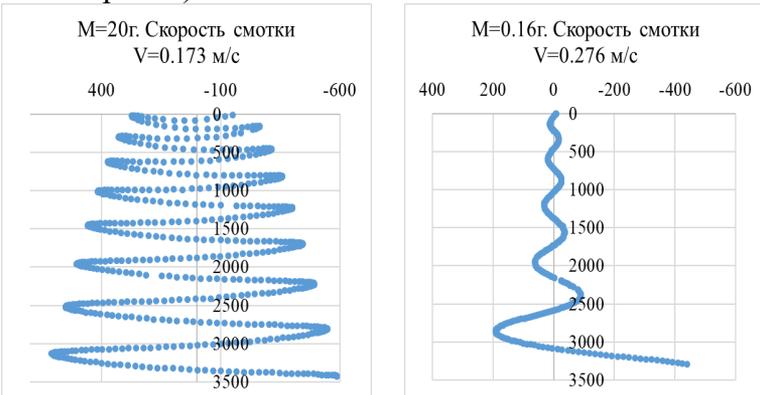


Рисунок 3. Примеры траекторий движения ц.м. груза.

Для численного моделирования процесса смотки на языке python разработана программа, которая реали-

зует разностную схему системы (7). Вычислительная сетка программы не регулярная, шаг по времени выбирается из выполнения условия Куранта-Фридрихса-Леви. Интегрирование осуществляется методом Рунге-Кутты 4-го порядка[7]. Результатом работы программы является положение исследуемого участка нити в пространстве.

Результат сравнения траекторий, полученных в результате численного и экспериментального моделирования при одинаковых начальных условиях (при массе груза много большей массы нити), представлен на рисунке 4.

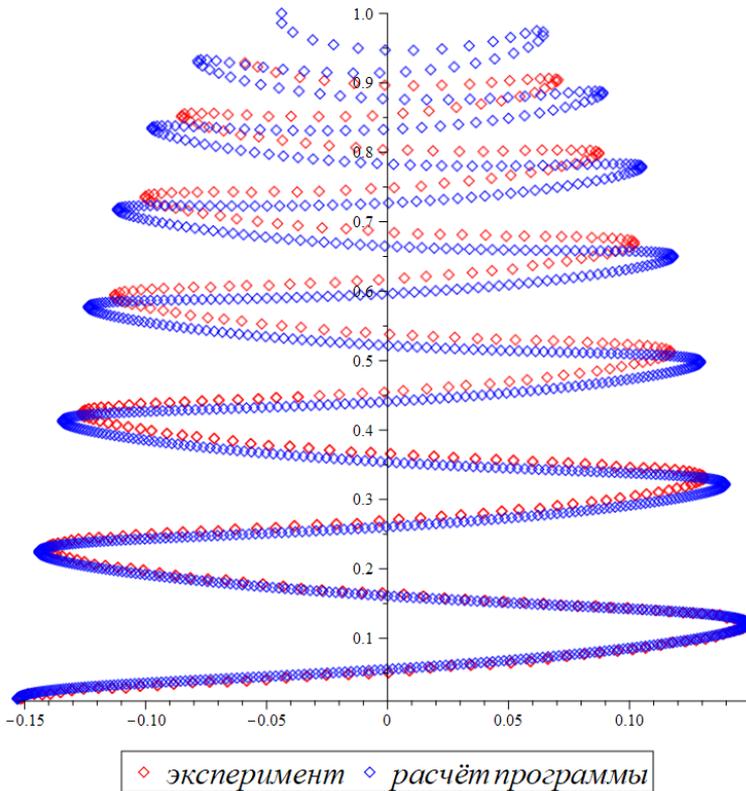


Рисунок 4. Экспериментальная и численная траектории.

Заключение. Созданы мобильные стенды, позволяющие проводить эксперименты сматывания-

разматывания нити с грузом на конце. Результаты обработки экспериментов позволяют проводить валидацию численных расчётов. Разработана программа, моделирующая движение нити в процессе смотки или размотки. В результате проведения валидации установлено качественное совпадение расчётной и экспериментальной траекторий движения. Из чего можно заключить, что «качественно» моделирование движения нити можно осуществлять с помощью предложенной модели.

Автор выражает благодарность Зубкову А.Ф. за помощь в подготовке и проведении экспериментов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-21-00230.

Список использованных источников

1. A.S. Wijnans, B.T.C. Zandbergen, M. Kruijff, E.J. van der Heide, Bare Electrodynamic Tape Tether Experiment onboard the Delfi-1 University Satellite, 4th International Spacecraft Propulsion Conference (ESA SP-555), Chia Laguna, Sardinia, Italy, 2-9 June 2004.

2. M. Kruijff, E.J. van der Heide, Qualification and in-flight demonstration of European tether deployment system on YES2, Acta Astronautica 64 (2009) 882–905.

3. Смиронов Н.Н., Звягин А.В., Малашин А.А. Динамические процессы при разворачивании тросовой системы во время полета КА «Фотон М-3». Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, 20-21 января 2011 года. – М.: Издательство Московского университета. 2011. С.454-457.

4. A.V. Zvyaguin, Yu.A. Demyanov, B.V. Kuksenko, A.A. Malashin, A.A. Luzhin, N.N. Smirnov, Dynamics of tether systems deployment in low Earth orbits, in: in: Proceedings of the Scientific Conference “Lomonosovskie Chteniya” Mechanics, Moscow University Press, 2007, p. 68.

5. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

6. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках / Х.А. Рахматулин, Е.И. Шемякин, Ю.А. Демьянов, А.В. Звягин: учеб. пособие. — М: Университетская книга; Логос, 2008.

7. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков «Численные методы» 1987.

Научное издание

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ-КОНКУРСА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

16–19 октября 2023 г.

Под редакцией профессора В. А. Самсонова

Электронное издание сетевого распространения

Публикуется в авторской редакции

Художественное оформление *К. В. Саутенков*

Верстка, подготовка иллюстраций *М. А. Гарбуз*

Ответственный за выпуск *А. А. Афанасьев*

Технический редактор *С. А. Ильин*

Макет утвержден 25.10.2024. № 12905.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
<https://msupress.com>. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com
