

МОДЕЛЬ МАСС ЯДЕР НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ЭНЕРГИЙ СВЯЗИ

© 2023 г. К. А. Стопани^{1)*}, Е. В. Владимирова²⁾,
В. В. Негребецкий²⁾, М. В. Симонов^{2),3)}, Т. Ю. Третьякова^{1),2)}

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.; после доработки 27.02.2023 г.; принята к публикации 28.02.2023 г.

По материалам доклада на "ICPPA-2022"

С помощью метода Монте-Карло цепей Маркова и метода регуляризации Тихонова получены байесовские оценки значения величины остаточной энергии нейтрон-протонного взаимодействия Δ_{np} . С использованием этих оценок рассчитана таблица масс ядер с $A > 20$. Точность сделанных предсказаний оценивается путем сравнения с экспериментальными данными АМЕ2020 и другими теоретическими моделями.

DOI: 10.31857/S0044002723040347, EDN: EGCUVV

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели масс атомных ядер, основанные на феноменологических выражениях, связывающих массы или энергии связи соседних ядер на NZ -диаграмме, известны достаточно давно. Массовая модель, представленная в работе Гарви и Келсона [1] и построенная на базе разностных соотношений GKL и GKT, связывающих между собой массы шести соседних ядер, часто применялась в такой области, как физика нейтронных звезд [2]. В публикациях [3–5] было показано, что подобные соотношения масс соседних ядер определяют разностные уравнения в координатах N и Z , являющиеся дискретными аналогами дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенный в [1] метод построения модели заключался в нахождении семейства общих решений разностного уравнения (в этом случае однородного) и выборе того решения из семейства, которое минимально отклоняется от масс, измеренных экспериментально.

В работах [6–8] для построения массовой модели использовано локальное массовое соотношение Δ_{np} , определяющее, в соответствии с [3], неоднородное разностное уравнение. В отличие от массовых моделей на основе соотношений GKL и

GKT в этих работах метод вычисления массовой таблицы был основан на рекурсивном применении формулы массового соотношения с использованием в качестве начальных значений экспериментально измеренных ядерных масс из баз данных АМЕ. Точность предсказания масс ядер в области, непосредственно примыкающей к области экспериментально измеренных масс, не уступает точности моделей, основанных на более детальных физических принципах [9]. В ряде современных статей рассматриваются новые типы массовых уравнений, полученных на основе уравнений GKL и GKT с добавлением неоднородной правой части [10–12].

Очевидно, что в силу присущей локальным массовым соотношениям принципиальной упрощенности, а также ввиду погрешностей экспериментального измерения ядерных масс, любое из вышеупомянутых массовых уравнений является приближенным, т.е. неявно включает в себя дополнительное флуктуирующее слагаемое. В настоящей работе это слагаемое рассматривается как случайная величина, аналогичная шуму, и с помощью методов байесовской статистики производится анализ поведения случайной составляющей в массовом соотношении Δ_{np} , после чего на основе полученных результатов делаются новые оценки значений ядерных масс.

2. БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ Δ_{np}

Массовое соотношение Δ_{np} определяется следующим выражением:

$$\Delta_{np}(N, Z) = W(N, Z) - W(N - 1, Z) - \quad (1)$$

¹⁾Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, Москва, Россия.

²⁾Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия.

³⁾Университет Юстуса Либиха, Гисен, Германия.

*E-mail: kstopani@sinp.msu.ru

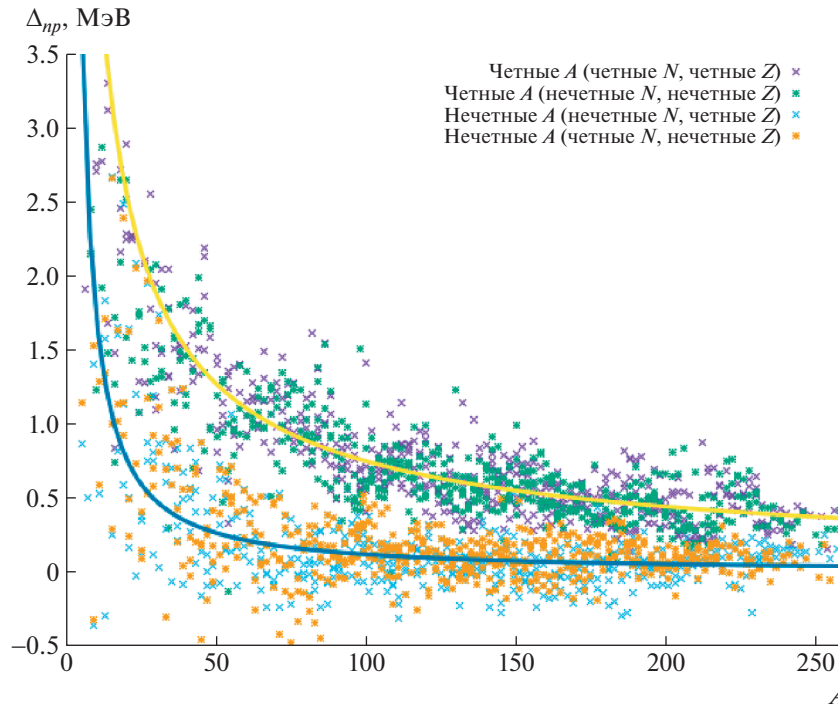


Рис. 1. Значения величины Δ_{np} , вычисленные по данным АМЕ2016. Кривые соответствуют аппроксимациям из работы [8].

$$-W(N, Z-1) + W(N-1, Z-1),$$

где $W(N, Z)$ — энергия связи ядра (N, Z) . Поведение этой величины на экспериментальных данных из библиотеки АМЕ2016 [13] в зависимости от массового числа $A = N + Z$ показано на рис. 1. Видно, что на плоскости (A, Δ_{np}) точки образуют две группы, соответствующие четным и нечетным значениям A , и при $A > 20$ в рамках каждой группы точки образуют достаточно однородные области, в которых, благодаря компенсации слагаемых в выражении (1), практически полностью сглажены эффекты скачков при заполнении оболочек. Это свойство и позволило использовать выражение Δ_{np} для построения массовых таблиц в [3, 6–8]. В то же время ввиду наличия нескомпенсированных проявлений структуры каждого отдельного ядра, а также погрешностей экспериментальных данных точки на графике отнюдь не сливаются в гладкую функциональную зависимость, а хаотически распределены в пределах группы. С формальной точки зрения можно рассмотреть значения Δ_{np} как случайные величины и воспользоваться методами байесовской статистики для того, чтобы определить их распределение.

Согласно теореме Байеса апостериорное распределение $P_{\text{post}}(\theta|x)$ случайной величины θ на основе данных из наблюдений x вычисляется по формуле

$$P_{\text{post}}(\theta|x) = P(x|\theta)P_{\text{prior}}(\theta)/P(x), \quad (2)$$

где $P_{\text{post}}(x|\theta)$ — функция правдоподобия, или вероятность наблюдения данных x при данном значении параметра θ , $P_{\text{prior}}(\theta)$ — априорное распределение, $P(x)$ — маргинальное распределение x , служащее для нормировки [14]. В подходе байесовской статистики использование теоремы Байеса для оценки статистических характеристик неизвестного параметра θ имеет следующую естественную интерпретацию: из заранее известной информации о θ , содержащейся в априорном распределении, и новых данных x извлекается суммарная информация о поведении θ в виде апостериорного распределения. В рассматриваемом случае в качестве данных x выступает набор значений $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$, вычисленных на основе экспериментальной базы данных ядерных масс АМЕ2016, а неизвестным параметром θ являются интересующие нас в конечном счете параметры распределения Δ_{np} . Таким образом, для построения байесовской модели необходимо задать вид, который имеют распределения, входящие в правую часть выражения (2).

Анализируя характер разброса точек в различных областях рис. 1, можно заключить, что разумным выбором функции правдоподобия будет следующий: при каждом значении A точки Δ_{np} имеют нормальное распределение с параметрами μ_A и σ_A^2 , а ввиду независимости всех отдельных значений Δ_{np} результирующая функция правдоподобия является произведением функций плотно-

сти вероятности нормального распределения для каждого Δ_{np}^{exp} из набора $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$. Таким образом, подлежащими оценке неизвестными параметрами байесовской модели θ являются совокупности параметров μ_A и σ_A^2 для каждого A . Для удобства функция правдоподобия, а также априорные распределения записываются в логарифмическом виде

$$\ln P(\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\} | \{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (3)$$

$$= - \sum_{A=A_{\min}}^{A=A_{\max}} \left[\sum_{\text{все } \Delta_{np,i}^{\text{exp}} \text{ с данным } A} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_A^2) + \frac{(\Delta_{np,i}^{\text{exp}} - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2} \right) \right].$$

Априорная информация о поведении параметров байесовской модели $\{\mu_A\}$ и $\{\sigma_A^2\}$ состоит в требовании достаточной плавности поведения их значений как функций массового числа A . Без этого требования значения μ_A и σ_A^2 при каждом A будут независимыми величинами, и, например, байесовская оценка μ_A совпадет со средним арифметическим всех Δ_{np}^{exp} с данным A по хорошо известному свойству байесовских оценок параметров нормального распределения. Борьба с физически недостоверными скачками при оценке параметров является задачей, решаемой методом регуляризации Тихонова [15], который обычно формулируется при использовании в рамках метода наименьших квадратов в виде дополнительного слагаемого к минимизируемой величине: $\chi_R^2 = \chi^2 + \tau \sum \theta_i^2$, где τ — регуляризационный параметр. По аналогии регуляризационная составляющая может быть определена и в априорном распределении:

$$\ln P_{\text{reg1}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (4)$$

$$= -\tau \sum ((\mu_A)^2 + (\sigma_A^2)^2),$$

где замена знака $+\tau$ на $-\tau$ отражает тот факт, что в отличие от χ_R^2 плотность вероятности P_{reg1} должна принимать тем меньшие значения, чем менее плавным является регуляризируемый набор параметров.

Пробные расчеты показали, что в рассматриваемом случае выражение (4) недостаточно эффективно выполняет функцию регуляризации параметров $\{\mu_A\}$ и $\{\sigma_A^2\}$, поскольку, сглаживая их поведение, одновременно приводит к занижению модуля значений. Поэтому рассматривались также варианты регуляризующего распределения на основе первой $\tau \sum (\theta_i - \theta_{i-1})^2$ и второй $\tau \sum ((\theta_i - \theta_{i-1}) - (\theta_{i-1} - \theta_{i-2}))^2$ дискретных производных регуляризируемых последовательностей,

для которых оптимальной формой последовательности являются, соответственно, фиксированная константа и линейная функция. Последний вариант показал наилучшие результаты и был использован для проведения расчетов. Таким образом, регуляризующее априорное распределение определяется выражением

$$\ln P_{\text{reg2}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (5)$$

$$= -\tau \sum ((\mu_A - 2\mu_{A-2} + \mu_{A-4})^2 + (\sigma_A^2 - 2\sigma_{A-2}^2 + \sigma_{A-4}^2)^2),$$

где A принимает значения с шагом 2, и подразумевается, что суммирование выполняется сначала для четных A , а затем для нечетных, чтобы требование регулярности выполнялось по-отдельности для групп Δ_{np} с четными и нечетными A .

В окончательном виде априорное распределение состоит из P_{reg2} , а также нормирующего априорного распределения, рекомендуемого в [16] для байесовской оценки параметра σ^2 нормального распределения:

$$\ln P_{\text{prior}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (6)$$

$$= \ln P_{\text{reg2}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) - 2 \sum_A \ln \sigma_A.$$

Маргинальное распределение $P(\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\})$ определяет плотность вероятности конкретных значений $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$ при любой комбинации параметров, и его нахождение может оказаться затруднительным ввиду необходимости вычисления многомерных интегралов. Однако используемый в настоящей работе численный метод получения байесовских оценок не зависит от точного указания маргинального распределения, поэтому можно определить его как $P(\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}) = \text{const.}$

Параметрами полученной статистической модели являются 238 пар значений μ_A и σ_A^2 при $20 \leq A \leq 258$. Для получения байесовских оценок их значений был использован метод Монте-Карло цепей Маркова, суть которого заключается в формировании равновесной цепи Маркова, значения которой на каждом шаге распределены в соответствии с апостериорным распределением (2), и генерации с ее помощью синтетической выборки значений параметров, а сгенерированная выборка в свою очередь используется для получения байесовских оценок статистических характеристик параметров, таких как среднее значение и стандартное отклонение [17]. Для генерации выборки применялся стандартный алгоритм Метрополиса, представляющий собой случайное блуждание в пространстве $\{\mu_A, \sigma_A^2\}$, где вероятность сделать

очередной случайный шаг определяется апостериорным распределением (2). Начальные значения μ_A и σ_A^2 для случайного блуждания определялись, соответственно, как среднее арифметическое и среднеквадратичное отклонения значений $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$ при данном A . В ходе случайного блуждания первые 100 000 сгенерированных точек отбрасывались для стабилизации алгоритма, а затем точки записывались через каждые 100 шагов для исключения корреляции между соседними точками результирующей выборки. Наконец, вычислялось среднее арифметическое значение и среднеквадратичное отклонение сгенерированной выборки параметров $\{\mu_A, \sigma_A^2\}$, и полученные величины использовались в качестве значения байесовских оценок этих параметров $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ и стандартного отклонения этих оценок соответственно.

Используя полученные $\{\mu_A^*\}$ в качестве величин Δ_{np} для всех A , по формуле (1) можно рассчитать значение неизвестной энергии связи ядра по трем соседним ядрам, для которых значение энергии связи известно. Полученное при этом значение энергии связи может быть затем использовано для той же цели при вычислении неизвестной энергии связи другого ядра, и, таким образом, эта операция может повторяться в течение нескольких повторений цикла, на каждом из которых к области ядер с известными энергиями связи на NZ -диаграмме добавляется очередной внешний слой. Для построения массовой таблицы производилось достаточное количество (несколько десятков) циклов итераций, а затем из массовой таблицы исключались несвязанные ядра с отрицательной величиной энергии отделения частиц и по полученным энергиям связи вычислялись массы.

Финальной стадией расчета был выбор параметров регуляризации τ . Вычисления показали, что вследствие различного поведения Δ_{np} необходимо использовать различные значения τ для четных и нечетных A . Как видно из (6), величина параметра регуляризации влияет на форму зависимости $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ от A . При небольших τ в ней могут присутствовать скачки, а в пределе бесконечно больших значений τ она превращается в линейную функцию. Для выбора оптимальных τ_{even} и τ_{odd} , соответственно, для четных и нечетных A , массовые таблицы вычислялись при различных значениях этих параметров $\ln \tau_{\text{even, odd}} = 5-20$ с шагом $\Delta \ln \tau = 1$. Для каждой массовой таблицы, полученной таким способом, вычислялась среднеквадратичная ошибка предсказания масс 65 проверочных ядер ΔRMS_{65} . Этими ядрами являются новые ядра, массы которых включены в базу данных AME2020 [18] и отсутствуют в предыдущей версии AME2016, на основе данных из которой

рассчитывались массовые таблицы. В качестве оптимальных $\tau_{\text{even, odd}}$ были выбраны те значения, при которых была минимальной величина ΔRMS_{65} . Их значения $\ln \tau_{\text{even}} = 19$ и $\ln \tau_{\text{odd}} = 7$. Соответствующие этим параметрам регуляризации байесовские оценки $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ показаны на рис. 2. Можно заметить, что соответствующее оптимальным оценкам поведение величины Δ_{np} для нечетных изотопов является гораздо менее плавным во всех областях массовых чисел. Поскольку Δ_{np} представляет собой остаточную энергию нейтрон-протонного взаимодействия, т.е. разность энергии отделения пары np и энергий отделения двух нуклонов по отдельности, то данное поведение при наличии одного непарного нуклона у нечетных ядер представляется объяснимым.

3. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МАССОВЫМИ МОДЕЛЯМИ

Полученные в предыдущем разделе оптимальные байесовские оценки $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ были использованы для расчета массовой таблицы на основе экспериментальных масс из базы данных AME2016. В таблице 1 приведены значения ΔRMS_{65} , рассчитанные по данным ряда теоретических массовых моделей, в сравнении с результатом настоящей работы. Аббревиатурой LMR обозначена массовая модель [8] на основе того же соотношения Δ_{np} , полученная без использования байесовского оценивания (аппроксимации Δ_{np} , использованные в этой модели, показаны на рис. 1). Модель FRDM(2012) [18] представляет собой макро-микроскопическую модель с многомерной параметризацией формы ядра и оболочечными поправками Струтинского. Модель HFB-17 [20] основана на подходе Хартри-Фока-Боголюбова с использованием потенциала Скирма. Модель DZ10 [21] основана на комбинированной массовой формуле Дюфло-Цукера [22], параметры которой определены по данным AME2016, а модель DZ10GP [23] по сравнению с ней была дополнена с помощью метода гауссовских случайных процессов. Сравнение показывает, что значение величины ΔRMS_{65} представленной модели несколько лучше, чем у модели LMR без использования байесовского оценивания, и заметно превосходит показатели теоретических моделей FRDM(2012), HFB-17 и DZ10. Наименьшее значение ошибки ΔRMS_{65} демонстрирует модель DZ10GP. В этой модели энергия связи ядер была представлена в виде суммы двух слагаемых $W_{\text{DZ10GP}}(A, Z) = W_{\text{DZ10}}(A, Z) + \varepsilon(A, Z)$, т.е. энергия связи, вычисленная по модели DZ10, корректируется случайной величиной $\varepsilon(A, Z)$, которая оценивается с помощью статистического метода гауссовских процессов и аппроксимирует те аспекты физической картины, которые не входят в

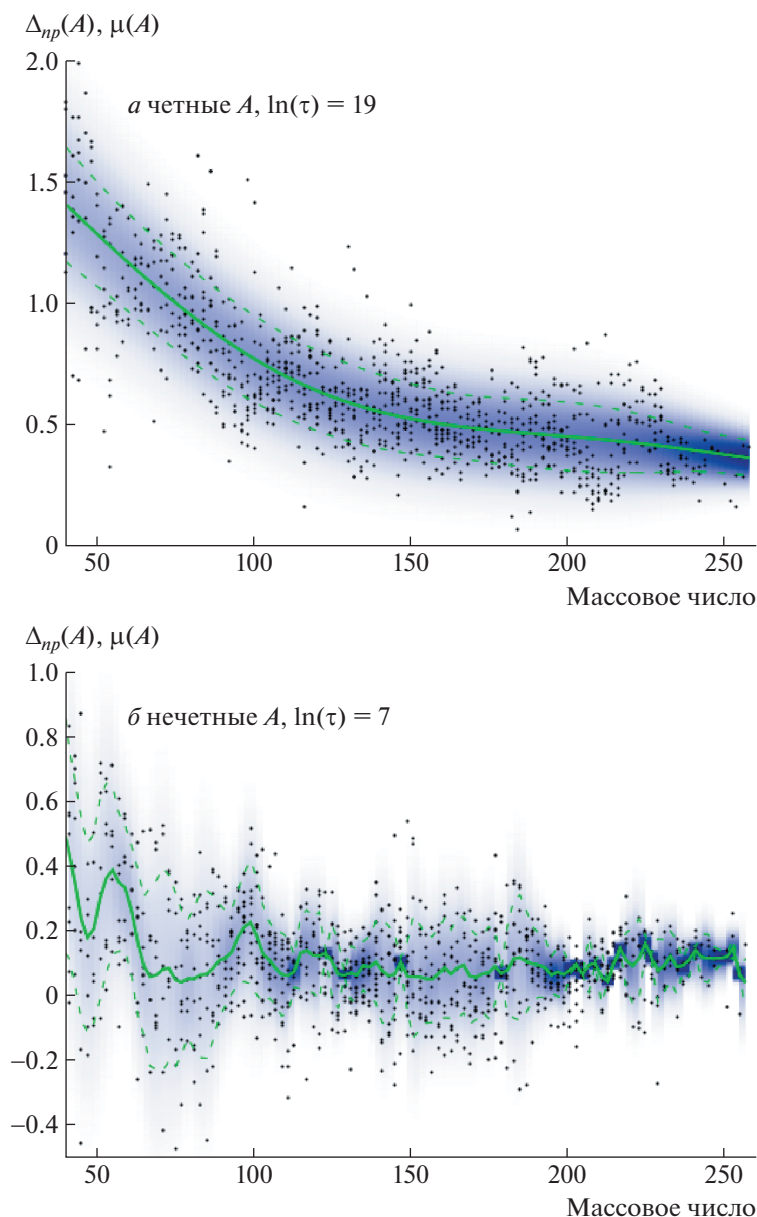


Рис. 2. Байесовские оценки параметров распределения Δ_{np} для четных (а) и нечетных (б) ядер. Сплошная кривая — оценка μ_A , штриховые кривые отстоят от μ_A на величину оценки σ_A^2 , яркость цвета соответствует апостериорному распределению Δ_{np} .

исходную теоретическую модель. Похожий подход был с успехом применен в ряде других работ: например, в [24] для коррекции порога отделения двух нейтронов в микроскопической модели на основе метода Хартри—Фока—Боголюбова гауссовским процессом или в [25] для коррекции ядерных масс, вычисленных по капельной модели с помощью статистического метода радиальных базисных функций. Можно отметить, что хотя полученные величины μ_A^* также могут рассматриваться как одномерный гауссовский процесс (см. [26]), все же представленный в настоящей работе подход не заключается в нахождении статистической по-

правки к положенной в качестве основы модели, а, напротив, исходно предполагает оцениваемую величину Δ_{np} случайной. Несмотря на такое серьезное упрощение, модель тем не менее показывает приемлемые результаты.

Использованные для оценки точности модели 65 новых ядер из AME2020 в основном непосредственно примыкают на NZ -диаграмме к данным AME2016. Для того чтобы оценить точность экстраполяции, на более длинном отрезке была использована следующая процедура. Из AME2016 исключались ядра, находящиеся на ее внешней границе, по оставшимся данным строилась мас-

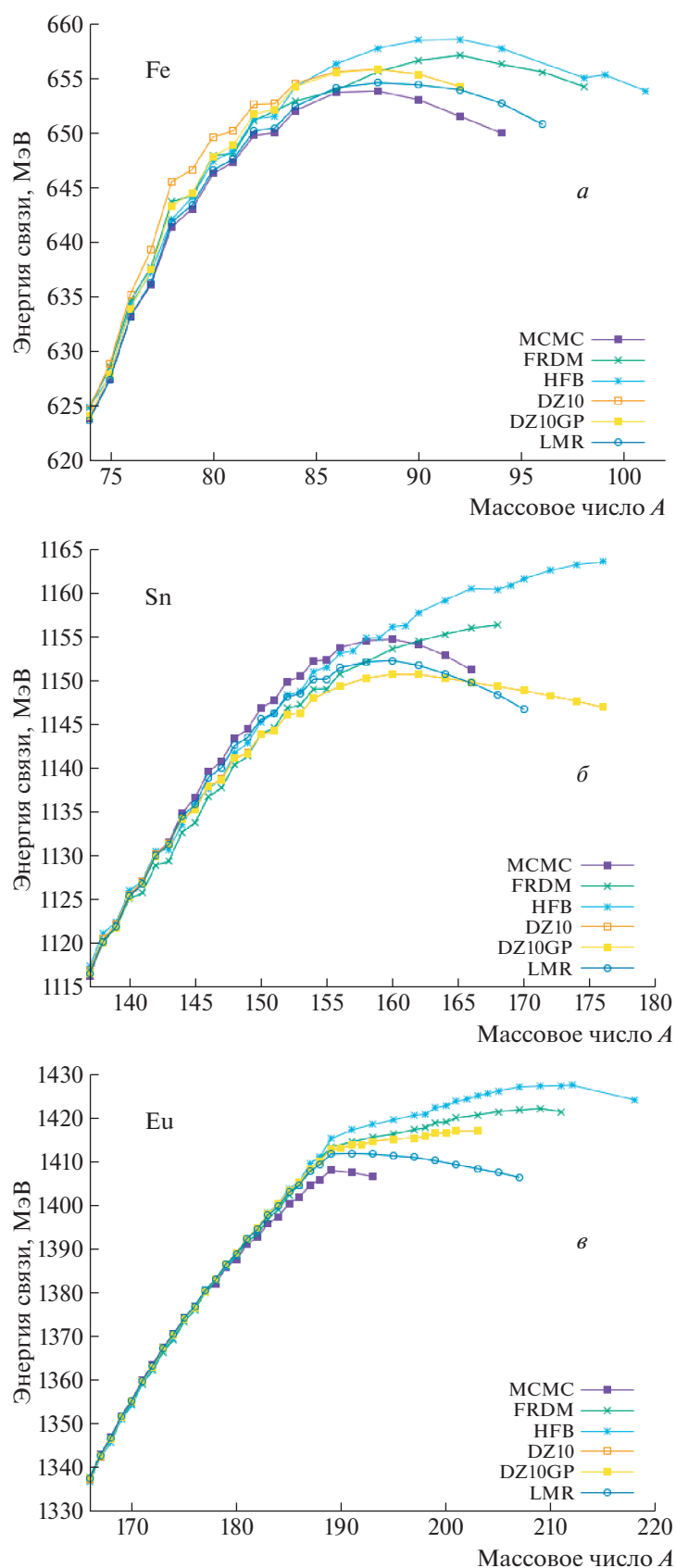


Рис. 3. Значения энергий связи нейтронно-избыточных изотопов Fe (*a*), Sn (*б*), Eu (*в*). MCMC — настоящая работа, LMR — данные из [8], FRDM — модель [18], HFB — модель [19], DZ10 — модель [20], DZ10GP — модель [21].

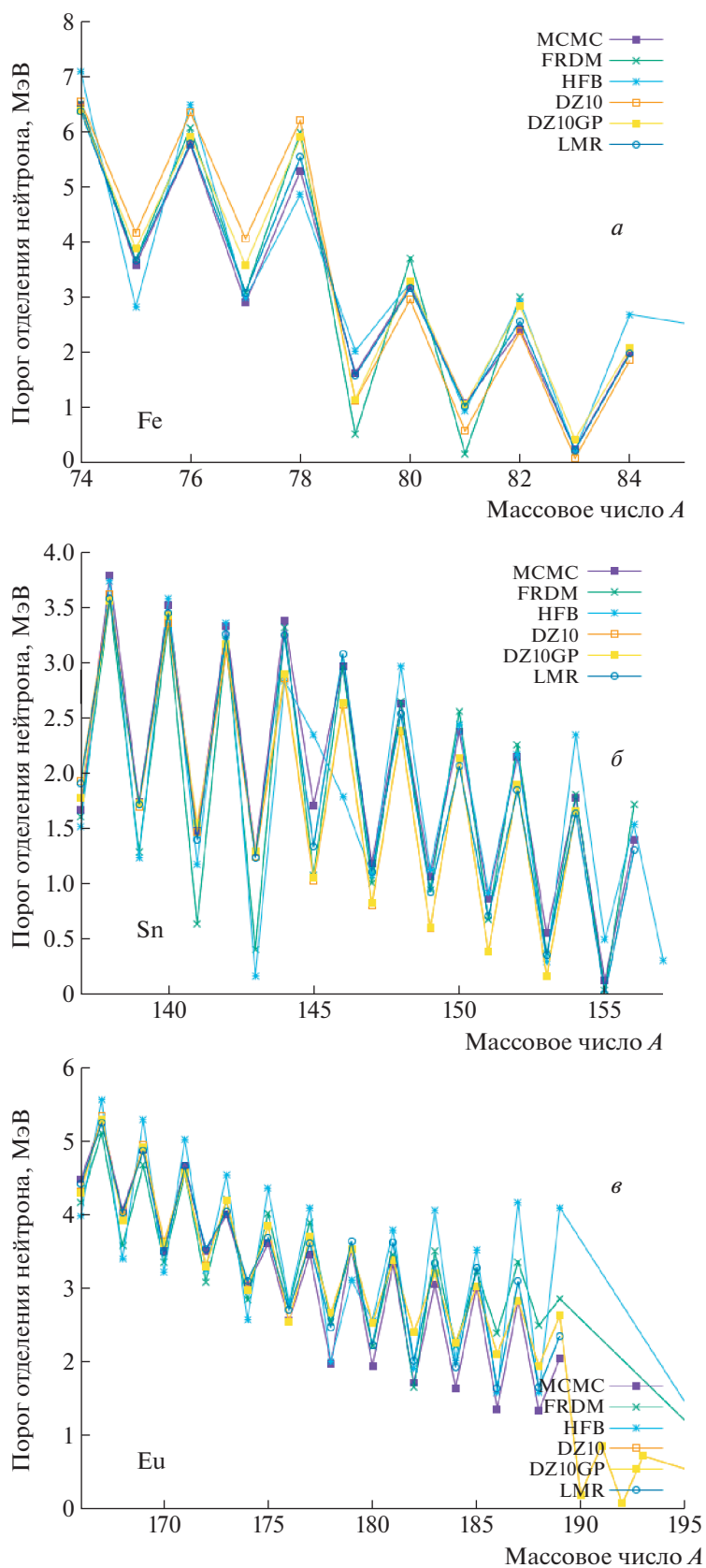


Рис. 4. Значения энергий отделения нейтрона в нейтронно-избыточных изотопах Fe (*a*), Sn (*б*), Eu (*в*). Обозначения совпадают с рис. 3.

Таблица 1. Среднеквадратичная ошибка предсказания масс 65 проверочных ядер ΔRMS_{65} по данным различных массовых моделей

Модель	ΔRMS_{65} , кэВ
Настоящая работа	361.9
LMR [8]	376.5
FRDM(2012)[18]	909.2
HFB-17 [19]	729.6
DZ10* [20]	815.2
DZ10GP* [21]	289.1

* В массовых таблицах DZ10 и DZ10GP отсутствуют ядра ^{46}Mn , ^{50}Co , ^{73}Rb , ^{211}Pa .

совая таблица и вычислялась величина ΔRMS_{65} . Этот шаг был повторен три раза, после чего из 2498 ядер AME2016 оставалось 1719. При этом величина ΔRMS_{65} плавно возрастала от 361.9 до 367.5 кэВ. Дальнейшее повторение процесса уменьшения объема входных данных было остановлено, поскольку не все из 65 проверочных ядер были достижимы при экстраполяции по формуле (1).

На рис. 3 и 4 показано сравнение вычисленных энергий связи и порогов отделения нейтрона B_n на нейтронно-избыточных изотопах Fe, Sn и Eu вплоть до границы отделения нейтрона (ввиду того, что представленная модель основана на экстраполяции экспериментальных данных AME2016, слева область сравнения ограничена изотопами, для которых данные AME2016 отсутствуют). Видно, что при длине дистанции экстраполяции до 10–20 шагов результаты настоящей работы в целом согласуются с предсказаниями других моделей, при этом расхождение предсказаний различных моделей начинается приблизительно одновременно. В области наиболее нейтронно-избыточных тяжелых ядер с $Z > 55$ энергии связи, рассчитанные в настоящей работе, оказываются систематически ниже предсказаний других моделей. Это расхождение достигает наибольшей величины около 10 МэВ в области $Z > 60$, $N > 140$.

Поскольку μ_A^* является байесовской оценкой $\Delta_{np}(A)$, а в выражение (1) входят лишь операции сложения и вычитания, то полученная с его помощью массовая таблица также является байесовской оценкой масс ядер. С другой стороны, как было сказано выше, массовые модели [1, 3–5, 10] получены как точное решение разностного уравнения

$$O^m M(A, Z) = \tau(A, Z), \quad (7)$$

где O^m — оператор соответствующего разностного выражения, а $\tau(A, Z)$ — необязательная правая часть уравнения. Упомянутые модели удовлетворяют уравнению (7) в каждой точке. В отличие от них массовая таблица в настоящей работе строится в ходе итерационной процедуры расширения AME2016, и поэтому разностное уравнение выполняется лишь в той части NZ -диаграммы, которая отсутствовала в AME2016 и была добавлена в результате расчета. Следовательно, в рамках исходной статистической модели полученная массовая таблица является математическим ожиданием ансамбля массовых таблиц, распределение значений $\Delta_{np}(A)$ в которых совпадает с распределением на рис. 1 и одной из которых является реальная массовая таблица с истинными значениями масс существующих ядер.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было исследовано статистическое поведение величины остаточной энергии нейтрон-протонного взаимодействия Δ_{np} и получены байесовские оценки параметров ее распределения, а также на их основе байесовские оценки масс ядер. Главной особенностью модели является простота как исходного массового соотношения, так и метода вычислений, не требующего сложных алгоритмов многомерной оптимизации или решения уравнений. При этом достигаемая точность экстраполяции оказывается не хуже, чем у значительно более сложных моделей, а также несколько превосходит точность предыдущей версии данной модели, не использующей байесовское оценивание. Байесовская оценка $\Delta_{np}(A)$ как функция массового числа для четно-четных и нечетно-нечетных ядер демонстрирует значительно более плавное поведение, чем для нечетных ядер. В последнем случае наиболее выраженные скачки наблюдаются вблизи $A = 60$ и $A = 100$.

Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. T. Garvey, W. J. Gerace, R. L. Jaffe, I. Talmi, and I. Kelson, *Rev. Mod. Phys.* **41**, S1 (1969).
2. С. Шапиро, С. Тьюколски, *Чёрные дыры, белые карлики и нейтронные звёзды, ч. 1* (Мир, Москва, 1985).
3. J. Jänecke and H. Behrens, *Phys. Rev. C* **9**, 1276 (1974).
4. J. Jänecke and P. J. Masson, *At. Data Nucl. Data Tables* **39**, 265 (1988).
5. P. J. Masson and J. Jänecke, *At. Data Nucl. Data Tables* **39**, 273 (1988).

6. Е. В. Владимирова, Б. С. Ишханов, М. В. Симонов, Т. Ю. Третьякова, Уч. записки физ. фак-та Моск. ун-та, 1930409 (2019).
7. E. V. Vladimirova, B. S. Ishkhanov, M. V. Simonov, S. V. Sidorov, and T. Yu. Tretyakova, *Int. J. Mod. Phys. E* **30**, 2150025 (2021).
8. E. V. Vladimirova, M. V. Simonov, and T. Yu. Tretyakova, *AIP Conf. Proc.* **2377**, 070003 (2021).
9. D. Lunney, J. M. Pearson, and C. Thibault, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1021 (2003).
10. Z. He, M. Bao, Y. M. Zhao, and A. Arima, *Phys. Rev. C* **90**, 054320 (2014).
11. J. L. Tian, N. Wang, C. Li, and J. J. Li, *Phys. Rev. C* **87**, 014313 (2013).
12. Y. Y. Cheng, Y. M. Zhao, and A. Arima, *Phys. Rev. C* **89**, 061304 (2014).
13. W. J. Huang, G. Audi, M. Wang, F. G. Kondev, S. Naimi, and X. Xu, *Chin. Phys. C* **41**, 030002 (2017); M. Wang, G. Audi, F. G. Kondev, W. J. Huang, S. Naimi, and X. Xu, *Chin. Phys. C* **41**, 030003 (2017).
14. А. А. Боровков, *Математическая статистика* (Лань, Санкт-Петербург, 2010).
15. А. Н. Тихонов, Докл. Акад. Наук СССР **151**, 501 (1963).
16. A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis, 3rd ed.* (New York, Chapman and Hall/CRC, 2013).
17. R. M. Neal, Tech. Report CRG-TR-93-1 (University of Toronto, September 1993).
18. W. J. Huang, M. Wang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, *Chin. Phys. C* **45**, 030002 (2021); M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, *Chin. Phys. C* **45**, 030003 (2021).
19. P. Möller, A. J. Sierk, T. Ichikawa, and H. Sagawa, *At. Data Nucl. Data Tables* **109**, 1 (2016).
20. S. Goriely, N. Chamel, and J. M. Pearson, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 152503 (2009).
21. A. Pastore, D. Neill, H. Powell, K. Medler, and C. Barton, *Phys. Rev. C* **101**, 035804 (2020).
22. J. Duflo and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **52**, R23 (1995).
23. M. Shelley and A. Pastore, *Universe* **7**, 131 (2021).
24. L. Neufcourt, Y. Cao, W. Nazarewicz, and F. Viens, *Phys. Rev. C* **98**, 034318 (2018).
25. N.-N. Ma, H.-F. Zhang, X.-J. Bao, and H.-F. Zhang, *Chin. Phys. C* **43**, 044105 (2019).
26. A. Gratton and M. I. Wilkinson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **485**, 4878 (2019).

NUCLEAR MASS MODEL BASED ON BAYESIAN ESTIMATES OF LOCAL DIFFERENCE EXPRESSIONS OF BINDING ENERGIES

K. A. Stopani¹⁾, E. V. Vladimirova²⁾, V. V. Negrebetskiy²⁾, M. V. Simonov^{2),3)},
T. Yu. Tretyakova^{1),2)}

¹⁾*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow, Russia*

²⁾*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia*

³⁾*Justus Liebig University, Giessen, Germany*

Using the Markov Chain Monte Carlo method and Tikhonov regularization the Bayesian estimates of the value of the residual neutron-proton interaction energy Δ_{np} were obtained. These estimates are used for calculation of the nuclear mass table for $A > 20$. The accuracy of the obtained predictions is evaluated by comparison with experimental data from AME2020 and other theoretical nuclear mass models.