Критерии высотности атома

Постановка задачи

Пусть M^2 — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $f^{-1}(k) = \{x \in M^2 : f(x) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, — ее связный критический уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ не содержит критических точек, кроме лежащих на критическом уровне $f^{-1}(k)$.

Определение 1. Атомом называется поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ с заданной на ней функцией Морса f. Два атома называются изоморфными, если существует гомеоморфизм поверхностей (сохраняющий ориентацию, если поверхность ориентирована), который связные компоненты линий уровня первой функции переводит в связные компоненты линий уровня второй функции.

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f, высотным, если существует такое вложение $i: f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]) \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(i(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $i(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]))$.

Наша задача состоит в получении необходимых и достаточных условий высотности атома. Для удобства мы пользуемся определением атома через f-граф (см. Ошемков А.А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. 205. 131–140), что в свою очередь позволяет работать с атомами как с комбинаторными объектами. f -Граф представляет собой связный конечный граф, состоящий из непустого множества ориентированных циклов (окружностей) и неориентированных ребер. Назовем f-граф ориентированно вложимым в плоскость, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные хотя бы одним ребром, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. И.М. Никонов обнаружил, что высотность атома эквивалентна ориентированной вложимости его f-графа в плоскость. Это позволило свести задачу проверки высотности атома к проверке ориентированной вложимости его f-графа в плоскость.

Таким образом, получено два новых критерия высотности атома в терминах его f-графа. Предъявлены явно препятствия к ориентированной вложимости f-графа в плоскость, доказана их минимальность.

Основные результаты

Теорема 1 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома). Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$ (см. Рис.).

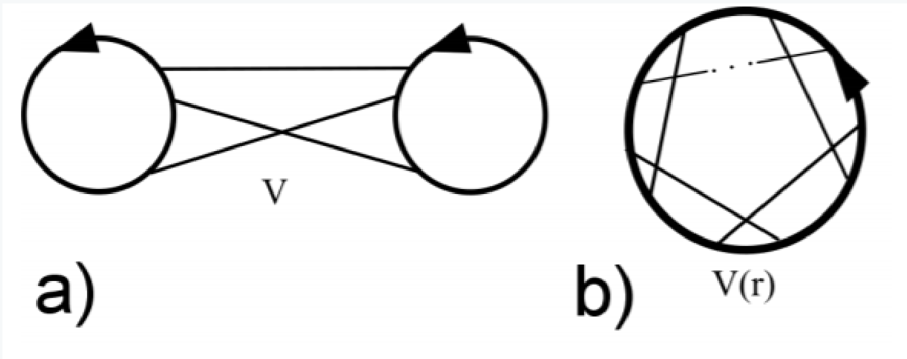

Рис.: Препятствия V и $V(r)$

Утверждение (В.А. Трифонова, минимальность списка препятствий V и $V(r), r \geq 1$). Препятствие V и серия препятствий $V(r), r \geq 1$, образуют минимальное (по включению) множество препятствий, для которого выполнено свойство из теоремы 1.

Теорема 2 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома). Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит подграфа, гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$, и не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V.

Трифонова Виктория Александровна

trifonovaviktoriya2012@yandex.ru

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Sirius