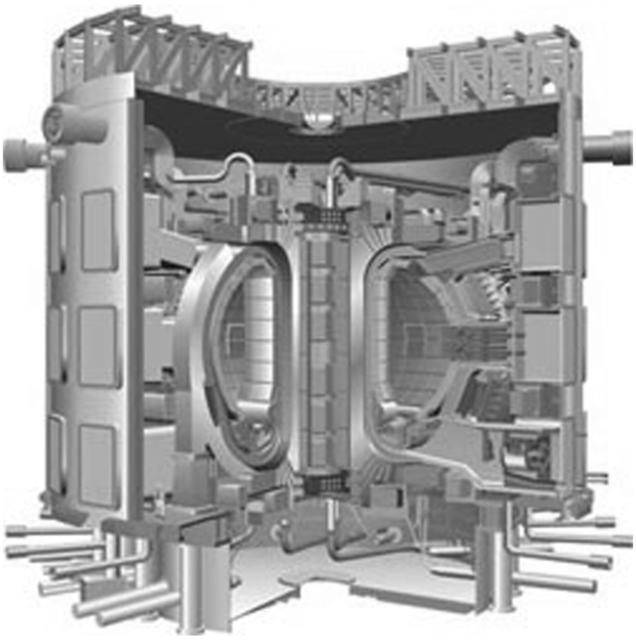
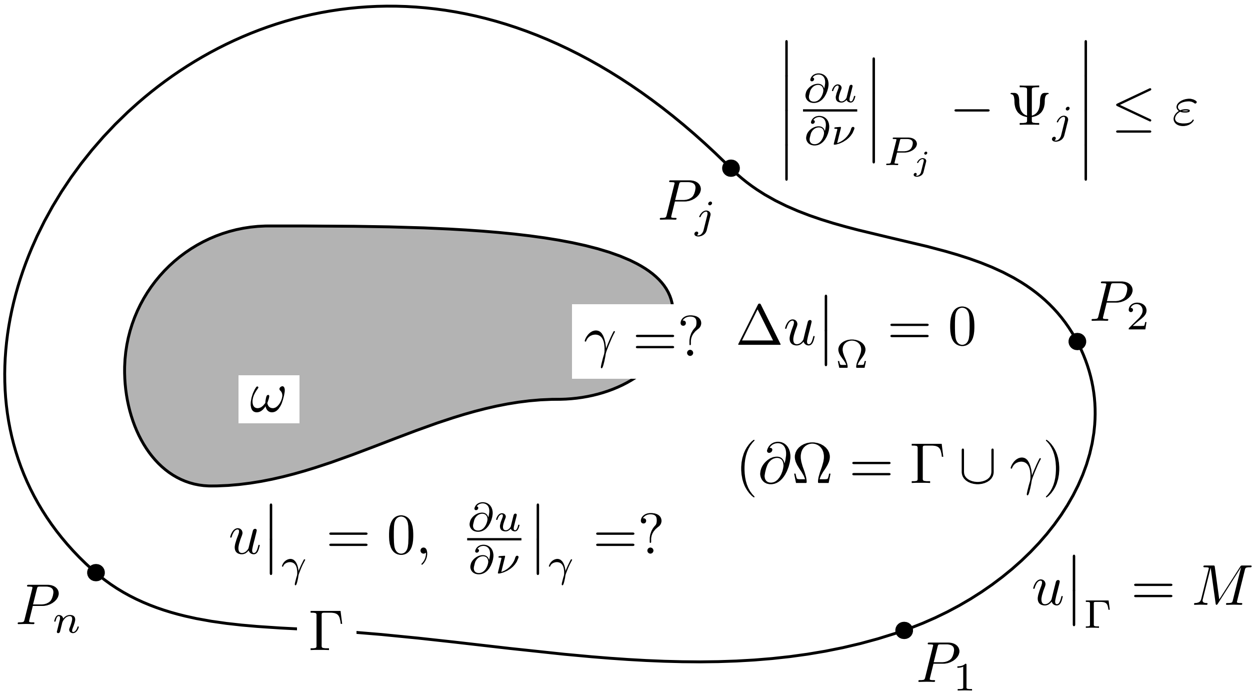
# ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА В ТОКАМАКЕ

demidov.alexandre@gmail.com

УМН, 65:1(391) (2010), 3–96

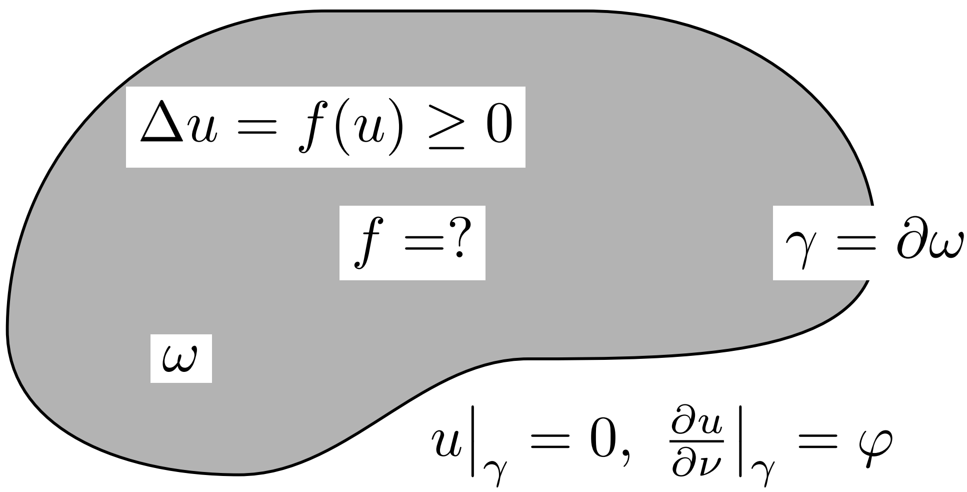


International Thermonuclear Experimental Reactor. Большой/малый радиус плазменного разряда равен 6,2м/2м. Расчетная температура плазмы $> 150$ млн. градусов, а длительность разряда $\sim 7$ минут.



$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{P_j} - \Psi_j \right| \leq \varepsilon$
$P_j$
$P_2$
$\gamma = ?$
$\Delta u\big|_\Omega = 0$
$\omega$
$(\partial\Omega = \Gamma \cup \gamma)$
$u\big|_\gamma = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma = ?$
$u\big|_\Gamma = M$
$P_n$
$\Gamma$
$P_1$


a)


$\Delta u = f(u) \geq 0$
$f = ?$
$\gamma = \partial\omega$
$\omega$
$u\big|_\gamma = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\gamma = \varphi$

b)

Для управления плазменным разрядом надо знать распределение тока, протекающего через сечение $\omega$ плазменного разряда, т.е. функцию

$$j : \overline{\omega} \ni (x, y) \mapsto j(x, y) \geq 0.$$

В гидродинамическом приближении $j(x, y) = f_u(x, y)$, где $f_u(x, y) = f\big(u(x, y)\big)$. Искомые: **область** $\omega$ со **свободной границей** $\gamma = \partial\omega$, **функция** $f$ и **функция** $u = u_{\omega,f} \in C^2(\omega) \cap C^1(\overline{\omega})$. Известно, что

$$f_u : \overline{\omega} \ni (x,y) \mapsto f\big(u(x,y)\big) \geq 0\,, \tag{1}$$

$$\left| \int_\omega f\big(u(x,y)\big)\, dxdy - \ I \right| \leq \mu \ll 1. \tag{2}$$

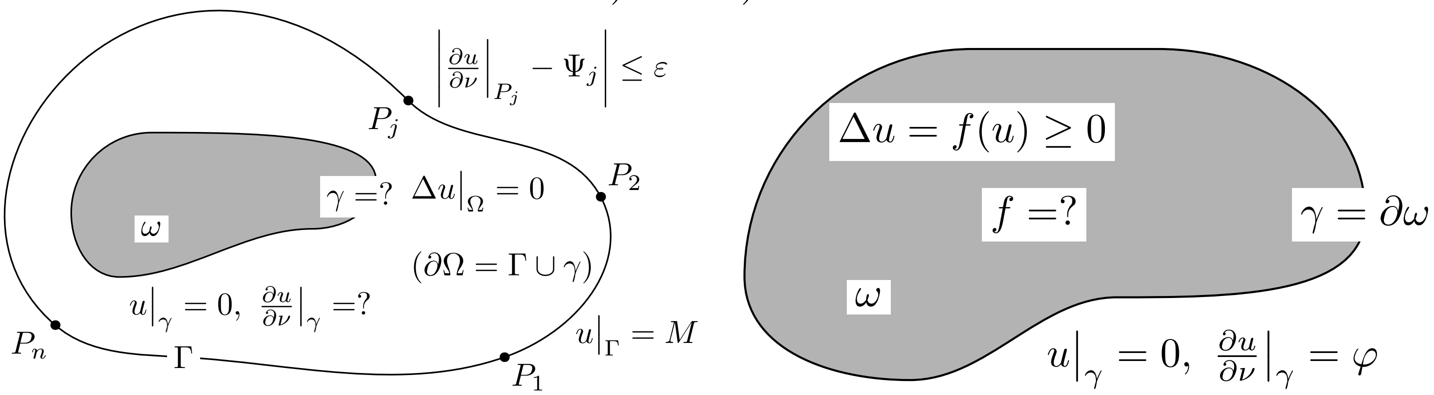
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\big(u(x,y)\big) \geq 0 \quad \text{в} \quad \overline{\omega}\,, \quad u\big|_{\gamma=\partial\omega} = 0\,, \\ \sup\limits_{P\in\gamma} \left| \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(P) - \ \Phi(P) \right| \leq \lambda \sup\limits_{P\in\gamma} \Big|\Phi(P)\Big|\,, \quad 1/\lambda \gg 1\,. \end{array}\right\} \tag{3}$$

$\Phi = \dfrac{\partial u^+}{\partial \nu}\Big|_\gamma$, где $u^+$ удовлетворяет таким условиям:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{for} \quad (x, y) \in \Omega = \mathcal{S} \setminus \overline{\omega}\,, \\
&u^+\Big|_{\Gamma = \partial\mathcal{S}} = M > 0\,, \quad \left| \frac{\partial u^+}{\partial \nu}\Big|_{P_j \in \Gamma} - \Psi_j \right| \le \varepsilon\,,
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

где число $M = u\big|_\Gamma$ характеризует "среднее" расстояние от $\gamma$ до $\Gamma = \partial\mathcal{S}$, а $\Psi_j$ — данные измерений магнитного потока в точках $P_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots, n$.

Итак, мы разделили исходную задачу на две ее составные подзадачи: a) и b)




a) b)

Проблема а) решается (УМН, вып. 1, 2010г., 3-96) с помощью *явной формулы* для градиента гармонической функции на ее линии уровня $\gamma$, лежащей в кольцеобразной области $\Omega$, при заданных ее аналитических данных Коши на внешней аналитической границе $\Gamma$, а также *алгебраического критерия* для множества неотрицательных тригонометрических многочленов с фиксированной средним значением, принимающих в точках $P_j$ заданные $\Psi_j$.

Хотел бы обратить внимание студентов на одну из задач, которую могу предложить для исследования. Она заключается в обобщении указанной явной формулы для решения уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ на случай решения эллиптического уравнения $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$. Такая формула очень востребована. Буду рад помочь тем, кто желает ее найти.

Проблема b) существенно сложнее проблемы a), хотя речь на этот раз идет о поиске в *фиксированной* области $\omega$ такой функции $u \in C^2(\omega)$ и такой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы при заданной функции $\Phi$

$$\Delta u = f\big(u(x,y)\big) \geq 0\,, \quad u\Big|_{\gamma=\partial\omega} = 0, \tag{5}$$

$$\sup_{P\in\gamma}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) - \ \Phi(P)\right| \leq \lambda \sup_{P\in\gamma}\Big|\Phi(P)\Big| \quad 1/\lambda \gg 1\,. \tag{6}$$

Впрочем, начиная с конца 70-х годов, физики ее численно решали, подбирая функцию $f$, для которой найдется такая функция $u$, что выполнены условия (5)–(6). Многие полагали (даже в докторских), что композиция $f(u)$ задает искомое распределение тока $j : (x, y) \mapsto f\big(u(x, y)\big)$. Но попытки подавить неустойчивости плазменного разряда, использующие композицию $f(u)$ в качестве распределение тока, часто давали обратный эффект.

На возможную причину этого печального результата указал В.Д. Пустовитов в статье *Nuclear Fusion* **41**, 2001, 721–730. Он предположил, что у задачи (5)–(6) могут найтись такие $f_j$ и $u_j$, что композиции $f_u^j = f_j(u_j)$ существенно различны для разных $j$. Поэтому попытки подавить неустойчивости, опираясь на композицию, не задающую истинного распределения тока, приводили к неудаче.

В УМН, вып. 1, 2010г., 3-96 было предложено называть композиции $f_u^1$ и $f_u^2$ **существенно различными**, если выполнены два условия

$$\Big|\frac{\|f_u^1\| - \|f_u^2\|}{\max\{\,\|f_u^1\|\,,\,\|f_u^2\|\,\}}\Big| \geq \frac{1}{10}\,,\ \|f_u^j\| \stackrel{def}{=} \max_{(x,y)\in\omega} |f_u^j(x,y)|$$

$$(\hat{x},\hat{y}) \in \operatorname{absmax} f_u^1 \qquad \Rightarrow \qquad (\hat{x},\hat{y}) \in \operatorname{absmin} f_u^2\,.$$

Это определение удовлетворило физиков (включая Шафранова, Костомарова).

В *Russian Journal of Mathematical Physics* **17**, 2010 (no. 1 и no. 2) было показано, что

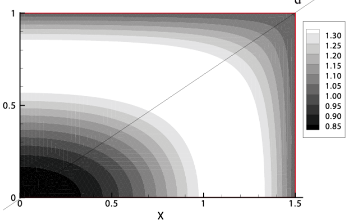
1) в классе полиномиальных функций $f$ существенно различные композиции $f_u^j$ возможны лишь для полиномов степени больше двух и

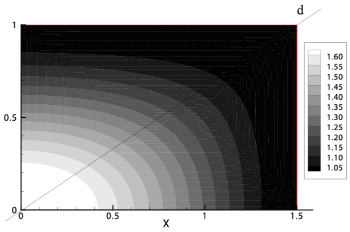
2) такие имеются для $\omega = \{|x| < 3/2,\ |y| < 1\}$ и

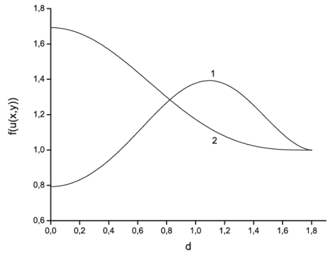
$$f^1(u) = 1 - 2.5u + 0u^2 + 15u^3,$$

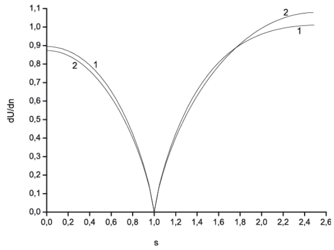
$$f^2(u) = 1 + 0u + 2.2u^2 + 0.1u^3$$

.


d
Y
X
0
0.5
1
1.5
1.30
1.25
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85


d
Y
X
0
0.5
1
1.5
1.60
1.55
1.50
1.45
1.40
1.35
1.30
1.25
1.20
1.15
1.10
1.05


f(u(x,y))
d
1
2
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8


dU/dn
s
1
2
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6

Актуальным является вопрос об условиях, при которых нет двух существенно различных композиций $f(u)$, иначе говоря при каких данных измерений магнитного потока на кожухе токамака (т.е. при каких $\Psi$) найденная композиция отражает истинное распределение тока в плазме.

Ответ на этот вопрос может быть получен в рамках решения более общей и более важной задачи.

Речь идет об описании всех существенно различных композиций при заданных данных измерений магнитного потока. Наличие нескольких таких композиций поставит перед физиками проблему поиска отбора среди них истинного распределения тока (например, с помощью лазерного зондирования). Подход к решению поиска всех существенно различных композиций дан в *Russian Journal of Mathematical Physics* **17**, 2010 no. 1).

Первые шаги в этом направлении сделаны. Но предстоит еще большая аналитическая и вычислительная работа, к которой, я надеюсь, будут склоны некоторые из студентов нашего факультета.