

Теорема Ван Дер Вардена и игры

Всем хорошо известна **Теорема ван-дер-Вардена**: Пусть натуральный ряд раскрашен в конечное число цветов. Тогда в нем можно найти сколь угодно длинную конечную одноцветную арифметическую прогрессию.

Теорема может быть переформулирована следующим образом: Пусть k и l – натуральные числа. Существует такое число $N(k, l)$, что для любого натурального $N > N(k, l)$ и любого разбиения множества $1, \dots, N$ на k подмножеств, одно из подмножеств содержит арифметическую прогрессию длины l .

Верхние оценки на числа $N(k, l)$ просто чудовишные. Например, $N(k, 3)$ имеет порядок экспонента от экспоненты и т.д. k раз, для $N(k, 4)$ вместо экспоненты итерируется функция $N(k, 3)$ и т.д. (лучшие оценки были получены совсем недавно и неэлементарными методами). Нижние оценки – только экспоненциальные. Этой теореме, в частности, был посвящен проект на Летней конференции Турнира Городов в 1995 году, так что **ее доказательство не является нашей целью**. Смежные вопросы над которыми предлагается подумать участникам таковы:

1. Можно ли раскрасить множество натуральных чисел так, чтобы бесконечной одноцветной арифметической прогрессии не нашлось?
2. Докажите экспоненциальную нижнюю оценку: $N(s, l) > s^{l/2}$. Попробуйте построить явную конструкцию.
3. Можно ли раскрасить более половины вершин какого-нибудь правильного n угольника в чёрный цвет так, что объединение исходной раскраски и любых десяти её поворотов не покроют чёрным цветом все клетки? Постарайтесь получить по-возможности лучшие оценки на n , а также явные конструкции.

Теорема Семереди (она же **гипотеза Эрдеша-Турана**, поставленная в 1936 году) утверждает, что если A – произвольное подмножество натурального ряда и последовательность $a_n = \frac{A \cap \{1, \dots, N\}}{N}$ имеет предельную точку отличную от нуля (то есть существует подпоследовательность $a_{k_1}, \dots, a_{k_i}, \dots$ стремящаяся к точке отличной от нуля), тогда для любого натурального $k > 3$ множество A содержит арифметическую прогрессию длины k . Это один из основных результатов Семереди (полученный в 1975 году), за которые он получил премию Абеля. Для прогрессий длины 3 этот результат получен Клаусом Ротом в 1953 году.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Семереди.

Один из основных результатов Теренса Тао явилось доказательство того, что *среди простых чисел найдется сколь угодно длинная арифметическая прогрессия*. Результат И.Д.Шкрёдова относится к нахождению чёрного треугольника в квадрате $N \times N$ при раскраске некоторой доли клеток в черный цвет

(см. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=912&option_lang=rus).

Наша цель – посмотреть на эту тематику с игровой точки зрения. Возможно, этот альтернативный взгляд позволит лучше понять вопросы, связанные с теоремами Ван-Дер-Вардена и Семереди и получить новые результаты, в частности, оценки в теореме Ван-Дер-Вардена.

Серия А

1. Двое играют в следующую игру. На бесконечной в обе стороны клетчатой полоске первый ставит в свободную клетку один крестик, второй ставит в 1000 свободных клеток нули. Цель первого игрока – создать арифметическую прогрессию из крестиков длины 3, цель второго – ему помешать.
 - а) Докажите, что у первого игрока существует выигрышная стратегия.
 - б) Докажите, что найдется число n , такое что первый сможет гарантированно завершить игру за n ходов.
 - в) Найдите минимальное n в условиях пункта б).

- г) Пусть теперь первый и второй играют на бесконечной в **одну** сторону полосе. Найдите минимальное число ходов достаточное для выигрыша первого игрока.
2. Двое играют на бесконечной клетчатой плоскости в следующую игру. Первый ходит крестиком в свободную клетку, второй отвечает ему 1000 нулями. Цель первого – создать равнобедренный прямоугольный треугольник из крестиков, катеты которого параллельны осям координат. Цель второго – помешать ему.
 - а) Докажите, что у первого игрока существует выигрышная стратегия
 - б) Найдите минимально число ходов необходимое для гарантированного выигрыша первого.
 3. Сможет ли первый создать арифметическую прогрессию длины 4 в условиях задачи 1?
 4. В условиях задачи 2 может ли первый построить квадрат?
 5. Пусть в игре на полоске первый ставит один крестик, а второй отвечает ему n ноликами. Может ли первый создать арифметическую прогрессию длины k ?
 6. Оцените минимальное число ходов необходимое для выигрыша первого в предыдущей задаче.
 7. Теперь два игрока играют в игру на плоскости. Первый ставит одну красную точку, второй отвечает k синими. Докажите, что для любого набора из n точек F , первый сможет создать фигуру F' подобную F (то есть получающуюся из F композицией гомотетии и параллельного переноса), все вершины которой красные.

Серия Б

Обобщенная теорема ван-дер-Вардена: Пусть рациональные точки плоскости раскрашены в конечное число цветов. Тогда для любой фигуры M состоящей из конечного числа рациональных точек, можно найти одноцветную фигуру M' подобную M (то есть получающуюся из M композицией гомотетии и параллельного переноса) состоящую из рациональных точек.

1. Докажите, что в формулировке обобщенной теоремы Ван-Дер-Вардена понятие *подобного множества* нельзя заменить на понятие *конгруэнтного* (или *равного* согласно терминологии современной школьной программы). Иными словами, одноцветного множества, конгруэнтного множеству M может и не найтись.
 (*) А что если рассмотреть группу преобразований, сохраняющих площадь или *гиперболических поворотов* (а именно, преобразований, сжимающих одну ось координат OX и растягивающих другую OY в одно и то же число раз)?
2. Рациональные точки плоскости раскрашены в несколько цветов. Доказать, что найдется прямоугольный треугольник, с катетами, параллельными осям координат с одноцветными вершинами. (При решении этой задачи разрешено пользоваться теоремой Ван-Дер-Вардена).
3. (** решение этой задачи неизвестно) В условиях предыдущей задачи докажите, что найдется одноцветный прямоугольник площади 1 с одноцветными вершинами.
 Назовем симплекс в n -мерном пространстве *стандартным* если у него есть n ребер, параллельным осям координат.
4. Рациональные точки n -мерного пространства раскрашены в несколько цветов. Доказать, что найдется стандартный симплекс с одноцветными вершинами. (При решении этой задачи разрешено пользоваться теоремой Ван-Дер-Вардена).
5. Сформулируйте и докажите игровую форму предыдущих пунктов.
 Вторая задача в этой серии в игровой форме становится уже подъемной. В этой связи возникает вопрос:
6. (*) Сформулируйте и решите игровую форму задачи об образе данного конечного множества под действием гиперболических поворотов.

Серия В

1. Имеется неограниченное количество игровых досок 8×8 . Первый своим ходом ставит 2 фишки на любые из них, второй отвечает постановкой одной черной фишки на любую из досок.
 - а) Может ли первый гарантированно замостить одну из досок?
 - б) За какое наименьшее число ходов первый сможет это сделать?
2. Двое играют в крестики – нолики на бесконечной в одну сторону клетчатой полоске. Первый ходит двумя крестиками, второй отвечает ноликом. Может ли первый получить 100 крестиков идущих подряд?
3. Может ли первый в условиях первой задачи добиться этого за 2^{45} ходов?
4. А за 2^{90} хода?

Серия Г

Двое художников играют в следующую игру. Первый ставит на плоскости точку и соединяет с несколькими поставленными ранее. При этом пересекать ранее проведенные дуги нельзя. Второй красит поставленную первым точку так, чтобы никакие две одноцветные точки не были соединены дугой.

1. Может ли первый заставить второго использовать более n цветов?
2. Может ли первый достичь этого за полиномиальное число ходов (от n)?
3. Нарисовано дерево. Двое по очереди красят вершины так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета. Может ли первый заставить второго использовать более четырех цветов?
4. Может ли первый, в условиях предыдущей задачи, заставить второго использовать более трех цветов?
5. Имеется двудольный граф G . Двое по очереди красят его вершины так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета. При этом второй игрок старается использовать как можно меньше цветов, а первый хочет заставить его использовать как можно больше цветов. Верно ли, что при любом натуральном N двудольный граф G можно подобрать так, что второму не хватит N цветов?

Серия Д

1. Дан полный граф на n вершинах. Двое по очереди красят его рёбра. Первый красит одно ребро красным, второй красит 100 ребер в синий цвет, и так повторяется, пока все рёбра не будут покрашены. Может ли первый при достаточно больших n добиться появления полного подграфа со 100 вершинами и всеми красными рёбрами?
2. В красный цвет раскрашены 99% рёбер полного графа из n вершин. Верно ли, что при достаточно большом n найдётся полный подграф из 1000 вершин с ребрами красного цвета?
3. Каждое k -элементное подмножество множества $\{1, \dots, n\}$ раскрашено в один из s цветов (например, при $k = 2$ получаем раскраску рёбер полного графа на n вершинах). Докажите, что при достаточно большом n найдётся такое подмножество $U \subset \{1, \dots, n\}$, что все его k -элементные подмножества – одного и того же цвета, причём если x – минимальный элемент из U , то число элементов в U не меньше $\exp(x) + s$.