

Н.В. Зайцева

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета

УДК 517.946

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение; нелокальное интегральное условие; оператор Бесселя; смешанная задача.*

Рассматривается смешанная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода и доказывается единственность ее решения. Решение задачи получено в явном виде.

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений активно изучаются с начала 90-х годов. Выделяют два класса задач: задачи, в которых интегральное условие задается вдоль характеристик, и смешанные задачи с классическими начальными данными и нелокальными условиями вместо стандартных граничных условий. Данная работа посвящена исследованию смешанной задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя с интегральным условием второго рода.

Смешанные задачи с интегральными условиями были рассмотрены в работах Д.Г. Гордезиани и Г.А. Авалишвили, А. Бузиани, Л.С. Пулькиной и других авторов. Многие классические методы не всегда применимы к исследованию нелокальных задач с интегральными условиями. А потому вопрос разработки методов исследования таких задач остается актуальным в настоящее время.

Результаты настоящей работы являются продолжением исследований смешанных задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений.

Постановка смешанной задачи с интегральным условием второго рода

Пусть $G = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости Oxt , $\Gamma_0 = \{(x, t) | x = 0, 0 < t < T\}$.

В области G рассмотрим В-гиперболическое уравнение вида

$$\square_B U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - B_x U = 0, \quad (1)$$

где $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя.

Постановка задачи: требуется найти функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$U(x, t) \in C^2(G) \cap C^1(G \cup \Gamma_0) \cap C(\bar{G}), \quad (2)$$

$$\square_B U(x, t) = 0, \quad (x, t) \in G, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

$$U(l, t) + \int_0^l U(x, t) x^k dx = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(l) + \int_0^l \varphi(x) x^k dx = 0, \quad \psi(l) + \int_0^l \psi(x) x^k dx = 0. \quad (7)$$

Единственность решения смешанной задачи (2)–(6)

Теорема 1. Смешанная задача (2)–(6) с интегральным условием (6) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Докажем теорему методом от противного. Пусть U_1 и U_2 – два предполагаемых решения задачи (2)–(6). Тогда их разность $\omega = U_1 - U_2$ удовлетворяет условиям (2)–(4) задачи (2)–(6), однородным начальным условиям

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad \omega_t|_{t=0} = 0 \quad (5_0)$$

и однородному интегральному условию

$$\omega(l, t) + \int_0^l \omega(x, t) x^k dx = 0. \quad (6_0)$$

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$x^k V_t \square_B V = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x^k \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial x} \right).$$

Полагая в этом тождестве $V = \omega$, с учетом того, что ω является решением уравнения (1), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x^k \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

Интегрируя последнее тождество по x на отрезке $[0, l]$, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E(t) = l^k \omega_t(l, t) \omega_x(l, t), \quad (8)$$

где

$$E(t) = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] x^k dx. \quad (9)$$

Уравнение (1) представим в виде: $\omega_{tt} = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$. Теперь умножим его на x^k и проинтегрируем на отрезке $[0, l]$. В результате получим:

$$\int_0^l \omega_{tt} x^k dx = l^k \frac{\partial \omega(l, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Продифференцируем два раза по t условие (6₀). В результате получим

$$\omega_{tt}(l, t) + \int_0^l \omega_{tt}(x, t) x^k dx = 0, \quad (11)$$

откуда

$$\int_0^l \omega_{tt}(x, t) x^k dx = -\omega_{tt}(l, t). \quad (12)$$

Заменяя в формуле (10) интеграл на его значение из (12), получим $l^k \omega_x(l, t) = -\omega_{tt}(l, t)$ или

$$\omega_x(l, t) = -l^{-k} \omega_{tt}(l, t). \quad (13)$$

Теперь заменим в формуле (8) функции $E(t)$ и $\omega_x(l, t)$ на их значения из (9) и (13), получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] x^k dx = -\omega_t(l, t) \omega_{tt}(l, t)$$

или $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] x^k dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\omega_t(l, t))^2 = 0$, откуда:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] x^k dx + (\omega_t(l, t))^2 \right\} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] x^k dx + (\omega_t(l, t))^2 = c_1 = const. \quad (14)$$

Полагая в (14) $t = 0$, с учетом начальных условий (5_0) , получаем $c_1 = 0$, а значит,

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] x^k dx + (\omega_t(l, t))^2 = 0,$$

откуда делаем вывод, что $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$. Следовательно, $\omega(x, t) = c$. Из этого равенства и начальных условий (5_0) следует, что $c = 0$, а значит, $\omega = 0$ и $U_1 \equiv U_2$. Теорема доказана.

Решение смешанной задачи с интегральным условием второго рода методом Фурье – Бесселя

Решение задачи (2)–(6) ищем в виде

$$U(x, t) = X(x)T(t), \quad (15)$$

где X и T – пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы функция (15) удовлетворяла уравнению (3) и граничным условиям (4) и (6). С этой целью подставим функцию (15) в уравнение (3) и условия (4) и (6).

$$XT'' = \left(X'' + \frac{k}{x} X' \right) T, \quad (16)$$

$$X'(0)T = 0, \quad (17)$$

$$\left(X(l) + \int_0^l X(x) x^k dx \right) T = 0. \quad (18)$$

Разделяя переменные в уравнении (16) и сокращая на T равенства (17) и (18), имеем

$$T'' + \lambda^2 T = 0, \quad (19)$$

$$X'' + \frac{k}{x} X' + \lambda^2 X = 0, \quad (20)$$

$$X'(0) = 0, \quad (21)$$

$$X(l) + \int_0^l X(x) x^k dx = 0. \quad (22)$$

Общее решение уравнения (20), удовлетворяющее условию (21), было получено [2] и имеет вид

$$X = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \quad (23)$$

Подставляя (23) в граничное условие (22), получим

$$l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda l) + \int_0^l J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) x^{\frac{k+1}{2}} dx = 0. \quad (24)$$

Известно [1], что

$$\int x^{p+1} J_p(x) dx = x^{p+1} J_{p+1}(x) + c. \quad (25)$$

Тогда в (24) с учетом (25) и формул Ньютона – Лейбница получим

$$\int_0^l J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) x^{\frac{k+1}{2}} dx = (\lambda l)^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l). \quad (26)$$

Заменяя в (24) интеграл на его значение из (26), будем иметь

$$l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda l) + (\lambda l)^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l) = 0. \quad (27)$$

Производя в (27) замену переменной $\lambda l = \tau$, получим

$$l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\tau) + (\tau)^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\tau) = 0. \quad (28)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ – положительные корни уравнения (28), расположенные в порядке возрастания. Тогда числа $\frac{\lambda_1}{l}, \frac{\lambda_2}{l}, \dots, \frac{\lambda_n}{l}, \dots$ определяют собственные значения спектральной задачи.

Полагая в (23) $\lambda = \frac{\lambda_n}{l}$, получим соответствующие собственные функции

$$X_n = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right), n = 1, 2, \dots. \quad (29)$$

Известно [1], что система функций $\left\{ J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) \right\}$ ортогональна с весом x в промежутке $[0, l]$. Поэтому система собственных функций (29) ортогональна с весом x^k в этом промежутке, то есть

$$\int_0^l x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n_1} x}{l}\right) x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n_2} x}{l}\right) x^k dx = \int_0^l x J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n_1} x}{l}\right) J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n_2} x}{l}\right) dx = 0. \quad (30)$$

Также известно [1], что система функций $\left\{ J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) \right\}$ полна в пространстве $L_2([0, l], x)$ и для них имеет место соотношение

$$\int_0^l x J_{\frac{k-1}{2}}^2\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} J_{\frac{k+1}{2}}^2(\lambda_n). \text{ Отсюда следует, что система собственных}$$

функций (29) полна в пространстве $L_2([0, l], x^k)$ и для функций этой системы имеет место соотношение

$$\int_0^l x^{1-k} J_{\frac{k-1}{2}}^2\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) x^k dx = \int_0^l x J_{\frac{k-1}{2}}^2\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} J_{\frac{k+1}{2}}^2(\lambda_n). \quad (31)$$

Поэтому любая функция $f(x)$ из $L_2([0, l], x^k)$ может быть разложена в ряд Фурье – Бесселя по системе собственных функций (29)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right), \quad (32)$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$\sigma_n = \frac{2}{J_{\frac{k+1}{2}}^2(\lambda_n)} \int_0^l f(x) J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) x^{\frac{k+1}{2}} dx = f_n. \quad (33)$$

Полагая в (19) $\lambda^2 = \frac{\lambda_n^2}{l^2}$, получим $T_n'' + \frac{\lambda_n^2}{l^2} T_n = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n = a_n \cos \frac{\lambda_n t}{l} + b_n \sin \frac{\lambda_n t}{l}, n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, система частных решений уравнения (3), удовлетворяющих условиям (4) и (6), определяется по формуле

$$U_n = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) \left(a_n \cos \frac{\lambda_n t}{l} + b_n \sin \frac{\lambda_n t}{l} \right), n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Решение задачи (2)–(6) ищем в виде

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) \left(a_n \cos \frac{\lambda_n t}{l} + b_n \sin \frac{\lambda_n t}{l} \right), \quad (35)$$

где a_n и b_n – пока неопределенные коэффициенты. Их найдем из требования, чтобы функция $U(x, t)$, определяемая рядом (35), удовлетворяла начальным условиям (5). С этой целью подставим ее в эти начальные условия:

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) = \varphi(x), \quad (36)$$

$$U'(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \lambda_n}{l} x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) = \psi(x). \quad (37)$$

Ряды (36) и (37) представляют собой разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье – Бесселя по системе собственных функций (29). В силу (33) коэффициенты этих разложений могут быть найдены по формулам

$$a_n = \frac{2}{J_{\frac{k+1}{2}}^2(\lambda_n)} \int_0^l \varphi(x) J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) x^{\frac{k+1}{2}} dx = \varphi_n, \quad (38)$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda_n J_{\frac{k+1}{2}}^2(\lambda_n)} \int_0^l \psi(x) J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) x^{\frac{k+1}{2}} dx = \psi_n. \quad (39)$$

Заменяя в (35) коэффициенты a_n и b_n на их значения из (38) и (39), получим решение задачи (2)–(6):

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right) \left(\varphi_n \cos \frac{\lambda_n t}{l} + \psi_n \sin \frac{\lambda_n t}{l} \right). \quad (40)$$

Согласно асимптотическим формулам для функции Бесселя [1], по признаку Вейерштрасса можно показать [2], что ряд (40) сходится равномерно в области $\bar{G}$, а также что $U(x, t) \in C^1(G)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если функции $\varphi, \psi \in C_0^2[0, l]$ и удовлетворяют условиям (7), то смешанная задача (2)–(6) однозначно разрешима и это решение определяется рядом (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 799 с.
2. Зайцева Н.В. Смешанная задача для одного В-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 2. С. 39–50.

N.V. Zaitseva

Mixed Problem for a B-Hyperbolic Equation with Integral Condition of the Second Kind

Key words: hyperbolic equation; nonlocal integral condition; Bessel operator; mixed problem.

The article deals with a mixed problem for a B-hyperbolic equation with integral condition of the second kind and proves uniqueness of the solution. The solution of the problem is obtained in explicit form.