

Предикатная эквивалентность формул алгебры логики

Гасанов Э. Э., Колесниченко А.В.
Московский государственный университет

Аннотация

В работе исследуется предикатная эквивалентность формул, вводимая с помощью множества предикатов $\mathcal{P}$ и множества перестановок M . Множества $\mathcal{P}$ и M согласованы, если соответствующая им предикатная эквивалентность совпадает с обычной эквивалентностью формул. Доказывается критерий согласованности множеств. Предложен алгоритм построения согласованных множеств предикатов. Приводятся серии примеров взаимно согласованных множеств $\mathcal{P}$ и M с разными соотношениями сложностных характеристик.

1 Введение

В компьютерной математике важную роль играют формальные языки, с помощью которых можно описывать объекты, подлежащие изучению. Такие языки могут использоваться, например, для описания геометрических фигур.

В частности, необходимость аналитического описания геометрических объектов возникает при решении краевых задач математической физики. Так практически во всех приближенных методах решения краевой задачи для некоторой области G приближенное решение ищется в виде

$$u_n = w(x) \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x) + \varphi_0(x),$$

где $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) — заранее выбранные известные функции, $C_1, C_2, \dots, C_n$ — неизвестные постоянные коэффициенты. А функция $w(x)$ — непрерывная функция, имеющая внутри области G ограниченные и непрерывные производные и удовлетворяющая условиям $w(x) > 0$ внутри G , $w(x) = 0$ на границе G .

Встает задача построения для заданной области G описанной выше функции $w(x)$. Чтобы более формально ввести постановку этой задачи делаются следующие предположения.

Предполагается, что исследуемая область (фигура) G есть подмножество m -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что имеется некоторое множество D "хороших" функций, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$. Вводится обычным образом понятие формулы над D , и каждая формула над D реализует некоторую функцию, действующую из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$. Считается, что некоторая формула A над D является аналитическим описанием фигуры G , если функция, реализуемая формулой A , положительна внутри фигуры G и равна 0 на границе фигуры G .

Построение аналитического описания для некоторых областей (круг, эллипс, выпуклый многоугольник) не составляет труда. Но если область представляет собой сложную фигуру, например, пятиконечную звезду или невыпуклую сложную фигуру и. т. д., то построение аналитического описания не так-то просто.

Метод решения этой задачи, получивший название метода R -функций, предложил В. Л. Рвачев [1, 2]. Суть этого подхода состоит в следующем.

Предполагается, что имеется некоторое множество базисных фигур $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$, причем для каждой фигуры G_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, имеется ее аналитическое описание $r_i(x_1, \dots, x_m)$. Предполагается, что фигура G , для которой надо найти ее аналитическое описание, представима в виде формулы $\mathcal{A}(G_1, \dots, G_n)$ над $\mathcal{G}$ с сигнатурой $\bigcap, \bigcup, \neg, (,)$, которая описывает представление фигуры G через базисные фигуры $G_1, \dots, G_n$ с помощью операций $\bigcap$ (пересечение), $\bigcup$ (объединение), $\neg$ (дополнение). Каждой фигуре G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) сопоставляется предикат p_i , определенный на $\mathbb{R}^m$, область истинности которого равна G_i . Производя в формуле $\mathcal{A}(G_1, \dots, G_n)$ формальную замену G_i на p_i и операций $\bigcap, \bigcup, \neg$ на $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\neg$ (отрицание) соответственно, мы получаем формулу $\mathcal{A}(p_1, \dots, p_n)$ логики предикатов, и эту формулу называем логическим описанием фигуры G .

Метод R -функций В. Л. Рвачева предлагает некий способ перехода

от логического описания фигуры G к ее аналитическому описанию.

Далее эта тематика была развита в работах А. А. Шакирова [3, 4, 5, 6].

Данная работа является развитием работы [3], в которой исследовалась следующая задача.

Рассматриваются формулы алгебры логики над множеством связок $\{\wedge, \vee, \neg\}$. Вводится обычное понятие равенства формул, а именно *формулы равны*, если они реализуют равные с точностью до существенных переменных функции. Далее рассматриваются только формулы, зависящие от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, и множество этих формул обозначается $\Phi(n)$. Вводится в рассмотрение множество предикатов $\mathcal{P} = \{p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_n(x, y)\}$, область истинности которых есть односвязные фигуры на плоскости. Это множество называется *множеством базисных фигур*, ассоциируя с каждым предикатом фигуру, соответствующую ее области истинности. Также вводится в рассмотрение множество n -перестановок M . Для произвольной формулы алгебры логики $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\Phi(n)$ каждая перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in M$ определяет формальную подстановку предикатов из $\mathcal{P}$ в формулу $\mathcal{A}$ и тем самым определяет формулу $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ логики предикатов, которая своей областью истинности задает некоторую фигуру на плоскости. Говорят, что формулы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Phi(n)$ $(M, \mathcal{P})$ -*равны*, если для любой перестановки $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in M$ формулы $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ и $\mathcal{B}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ задают одну и ту же фигуру. Говорят, что множества M и $\mathcal{P}$ *согласованы*, если формулы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Phi(n)$ равны тогда и только тогда, когда они $(M, \mathcal{P})$ -равны.

Каждому булевому вектору $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ сопоставляется подмножество $O(\mathcal{P}, a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_i(x, y) = a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Если подмножество $O(\mathcal{P}, a)$ не пусто, то оно называется *областью разбиения с характеристическим вектором a* . Понятно, что n базисных фигур не могут разбить плоскость более чем на 2^n областей.

В работе [3] показано, что если множество базисных фигур разбивает плоскость на 2^n областей, то с этим множеством согласовано любое множество n -перестановок, в частности, любое одноэлементное множество. С другой стороны в [3] показано, что если M есть множество всех n -перестановок, то согласованное с ним множество базисных фигур должно разбивать плоскость по крайней мере на $n + 1$ область, причем характеристические вектора областей должны содержаться на каждом

из $n + 1$ слое булевого куба.

В данной работе дается полный ответ на вопрос каким должно быть множество базисных фигур, согласованное с множеством перестановок, если известна мощность множества перестановок. А именно, для каждого натурального $t \in \{1, 2, \dots, n!\}$ и любого множества n -перестановок M мощности t дается точная формула, которая для каждого слоя куба говорит сколько характеристических векторов областей по крайней мере должен содержать слой, чтобы базовое множество фигур было согласовано с M .

Далее в работе [3] приводится алгоритм построения множества базисных фигур, которое разбивает плоскость на 2^n областей. В данной работе приводится алгоритм построения множеств базисных фигур с любым наперед заданным множеством характеристических векторов областей.

И наконец, в данной работе приводятся примеры согласованных множеств базисных фигур и перестановок с разными соотношениями мощностей множества характеристических векторов областей и множества перестановок.

Авторы выражают благодарность академику В.Б.Кудрявцеву и к.ф.-м.н. А.А.Шакирову за внимание к работе и ценные замечания.

2 Основные понятия и результаты

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ — множества действительных и натуральных чисел, соответственно; $E = \{0, 1\}$; $\mathbb{R}^2$ — двумерное евклидово пространство; E^n — *единичный n -мерный* (или *булев*) куб, т.е. E^n состоит из всех векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где при $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место $a_i \in E$. Вектора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из E^n называем *булевыми*. Для булевого вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ число $\|a\|$, равное числу единиц в векторе a , называем его *весом*. Множество $E_i^n = \{a \in E^n : \|a\| = i\}$, где $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, называем *i -м слоем булевого куба E^n* .

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\{x, y\}$ — переменные принимающие значения из E и $\mathbb{R}$, соответственно.

Пусть $x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, \neg x_1$ суть булевы функции, называемые, соответственно, *конъюнкцией*, *дизъюнкцией* и *отрицанием* и B — множество этих функций.

Обычным образом введем понятие формулы над B , как, например, в [7, 8].

Для $\sigma \in E$ обозначим через x_1^σ булеву функцию, равную $\neg x_1$, если $\sigma = 0$, и x_1 , если $\sigma = 1$.

Для упрощения записи в некоторых формулах будут опускаться скобки, как это принято в алгебре логики.

Переменная x_i , $1 \leq i \leq n$, функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется *существенной*, если можно указать такие наборы $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $b = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$, что $f(a) \neq f(b)$. В противном случае переменная x_i называется *фиктивной*.

Две булевы функции называются *равными*, если множества их существенных переменных совпадают и на любых двух наборах, различающихся, может быть, только значениями несущественных переменных, значения этих функций совпадают.

Пусть Φ_B — множество всех формул над B и $\Phi_B(x_1, \dots, x_n)$ (или просто $\Phi_B(n)$) — множество всех формул над B , реализующих функции, существенно зависящие от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из Φ_B называются *равными*, если они реализуют равные функции. Это отношение равенства разбивает Φ_B на классы эквивалентности $\mathcal{D}$, которые содержат точно все формулы, которые реализуют равные функции.

Фигурой или *областью* будем называть открытое или замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим множество базисных фигур в $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$. Каждой фигуре G_i сопоставим предикат $p_i(x_1, x_2)$, областью истинности которого является G_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ — n -перестановка, $\mathcal{P} = \{p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2), \dots, p_n(x_1, x_2)\}$ и $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Phi_B(n)$. Подставим в $\mathcal{A}$ вместо каждой переменной x_j предикат p_{i_j} из $\mathcal{P}$. Данную операцию назовем π -*подстановкой*, а полученное выражение $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ — $\mathcal{P}$ -*формулой*.

Поскольку описание фигуры G как в виде открытого подмножества плоскости, так и в виде предиката p , область истинности которого есть это подмножество G , являются тавтологическими, то мы далее будем использовать предикат p для обозначения фигуры G и будем говорить "фигура p " несмотря на то, что p — предикат, описывающий фигуру G .

Каждая $\mathcal{P}$ -формула $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ является формулой логики предикатов и реализует некоторый предикат. Свяжем с этой формулой фигуру $\mathcal{F}_{\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})} \subseteq \mathbb{R}^2$, являющуюся областью истинности данного пре-

диката, и будем говорить, что $\mathcal{P}$ -формула $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ задает (или описывает) фигуру $\mathcal{F}_{\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})}$.

Фигуры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ называются *равными* (пишем $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$), если они совпадают в $\mathbb{R}^2$ как множества.

$\mathcal{P}$ -формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовем *$\mathcal{P}$ -равными* (пишем $\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$), если они задают равные фигуры.

Пусть M — некоторое подмножество множества всех n -перестановок Π^n .

Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *$(M, \mathcal{P})$ -равными* (пишем $\mathcal{A} \stackrel{M, \mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$), если при любой соответственно одинаковой подстановке $\pi \in M$ в них предикатов из $\mathcal{P}$ вместо переменных получаемые $\mathcal{P}$ -формулы являются $\mathcal{P}$ -равными.

Отношение $(M, \mathcal{P})$ -равенства на множестве $\Phi_B(n)$ разбивает это множество на классы эквивалентности $\mathcal{D}_{M, \mathcal{P}}$, которые содержат точно все такие формулы, которые являются $(M, \mathcal{P})$ -равными.

Будем говорить, что множество базисных фигур $\mathcal{P}$ и множество n -перестановок M *согласованы*, если отношения равенства булевских формул и $(M, \mathcal{P})$ -равенства эквивалентны, т. е. разбиения $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_{M, \mathcal{P}}$ совпадают, или, что то же самое, для любых двух формул $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Phi_B(n)$ верно $\mathcal{A} \stackrel{M, \mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Пусть p — некоторая фигура. Через p^1 обозначим фигуру p , а через p^0 — дополнение к фигуре p , т.е. фигуру $\bar{p}$. Обозначим

$$h(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \not\equiv 0, \\ 0, & \text{если } p \equiv 0. \end{cases}$$

Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ — n -перестановка из Π^n и $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество базисных фигур, $M = \{\pi_1, \dots, \pi_k\} \subseteq \Pi^n$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a_1, \dots, a_n) &= h(p_{i_1}^{a_1} \cap p_{i_2}^{a_2} \cap \dots \cap p_{i_n}^{a_n}), \\ \chi_M^{\mathcal{P}} &= \Omega_{\pi_1}^{\mathcal{P}} \vee \Omega_{\pi_2}^{\mathcal{P}} \vee \dots \vee \Omega_{\pi_k}^{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Обозначим через ε тождественную перестановку

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Функцию $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}$ будем называть *функцией распределения* множества базисных фигур $\mathcal{P}$.

Множество всех граничных точек фигуры p назовем *границей* ∂p фигуры p .

Отрезком назовем часть прямой, заключенной между двумя различными точками этой прямой, при этом эти точки называются концами отрезка. Если x_1, x_2 концы отрезка, то отрезок обозначим через $[x_1, x_2]$.

Последовательность отрезков в $\mathbb{R}^2$

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \dots [x_{i-1}, x_i]$$

назовем *ломаной*, и *замкнутой ломаной*, если $x_1 = x_i$.

Не имеющую самопересечений замкнутую ломаную, состоящую из n отрезков, назовем *n -угольником*, а отрезки этой ломаной — сторонами n -угольника.

Область в $\mathbb{R}^2$, граница которой является n -угольником, называется *n -угольной областью*. Заметим, что для любого невырожденного n -угольника существует две n -угольные области, границей которых он является (внешняя и внутренняя).

Фигуру назовем *псевдовыпуклой*, если для любого горизонтального или вертикального отрезка из того, что концы отрезка принадлежат фигуре, следует, что весь отрезок принадлежит фигуре.

Введем *функцию качества* множества базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$

$$R(\mathcal{P}) = |\{(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n : h(p_1^{a_1} \cap \dots \cap p_n^{a_n}) = 1\}|.$$

Будем считать лучшим то множество базисных фигур, для которого $R(\mathcal{P})$ меньше.

Пусть нам дано множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, где все фигуры являются односвязными многоугольниками. *Сложностью фигуры p_i* назовем количество углов этой фигуры, и обозначим ее $C(p_i)$. *Сложностью множества базисных фигур $\mathcal{P}$* назовем количество углов фигуры данного множества, имеющей максимальную сложность, т.е. величину $C(\mathcal{P}) = \max_{p_i \in \mathcal{P}} C(p_i)$.

Введем в рассмотрение следующие функции

$$q_i(t) = \left\lceil \frac{n! - t + 1}{i! \cdot (n - i)!} \right\rceil, \quad (2)$$

где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $]a[$ — наименьшее целое не меньшее чем a .

Естественным образом возникают следующие вопросы.

1. Дано натуральное число t . Необходимо найти лучшее по качеству множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, которое согласовано с любым множеством n -перестановок M мощности t .

2. Дано множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Необходимо найти минимальное число t , такое что множество $\mathcal{P}$ согласовано с любым множеством n -перестановок M мощности t , или доказать что такого t не существует.

3. Дано множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ и множество n -перестановок M . Необходимо проверить согласованы ли множества $\mathcal{P}$ и M .

Ответы на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 1 Для любых $n \in \mathbb{N}$, $t \in \{1, 2, \dots, n!\}$ множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ согласовано с любым множеством $M \subseteq \Pi^n$, таким, что $|M| \geq t$, тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ на слое E_i^n существует хотя бы $q_i(t)$ наборов a таких, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1$, где $q_i(t)$ задается формулой (2), ε — тождественная перестановка, определяемая соотношением (1).

В работе [3] была доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 Множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ и множество $M \subseteq \Pi^n$ согласованы тогда и только тогда, когда $X_M^{\mathcal{P}} \equiv 1$.

Поскольку при фиксации $M \subseteq \Pi^n$ функция $X_M^{\mathcal{P}}$ однозначно определяется функцией распределения $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}$, то из утверждения 1 следует, что для любого $M \subseteq \Pi^n$ два множества базисных фигур $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, таких что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv \Omega_\varepsilon^{\mathcal{Q}}$, согласованы или не согласованы с M одновременно.

Поскольку любая перестановка оставляет наборы $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$ на месте, то другим следствием утверждения 1 является тот факт, что для любого множества базисных фигур $\mathcal{P}$, согласованного с каким-либо множеством перестановок M , выполнено $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(0, \dots, 0) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(1, \dots, 1) = 1$.

Поэтому при исследовании $\mathcal{P}$ на согласованность с M , можно работать не с конкретным базисным множеством фигур, а с классом множеств базисных фигур, задаваемых одной и той же функцией распределения. Следующая теорема показывает, что для любой такой булевой

функции $f(x_1, \dots, x_n)$, что $f(0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1) = 1$, существует множество базисных фигур $\mathcal{P}$, для которого $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$, причем доказывается этот факт конструктивно, т.е. предоставлением алгоритма, строящего по функции f соответствующее множество базисных фигур.

Теорема 2 *Для любого натурального n и любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, такой что $f(0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1) = 1$ существует такое множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$ и для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ фигура p_i является псевдовыпуклой многоугольной областью с количеством углов не более чем $6 \cdot 2^{n-3} + 2$.*

Следующие две теоремы предоставляют примеры согласованных множеств базисных фигур и перестановок с разными соотношениями качества множества базисных фигур и мощности множества перестановок.

Теорема 3 *Для любых натуральных k и n , $k < n$, существуют согласованные множество $M \subseteq \Pi^n$ и множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, для которых верно*

$$|M| = (n - k + 1)^k + \sum_{r=1}^{k-1} ((n - r + 1)^r - (n - r)^r),$$

$$R(\mathcal{P}) = 2^{n-k} + k \text{ и } C(\mathcal{P}) = \max(2^{n-2} + 3, 5 \cdot 2^{n-4}).$$

Теорема 4 *Для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_r$ и n таких, что $\sum_{i=1}^r k_i \leq n$, существуют согласованные множество $M \subseteq \Pi^n$ и множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, для которых верно $|M| = k_1! \cdot \dots \cdot k_r!$ и $R(\mathcal{P}) = (k_1 + 1) \cdot \dots \cdot (k_r + 1) \cdot 2^{n - \sum_{i=1}^r k_i}$.*

3 Доказательство теоремы 1

Согласно (2) для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ имеем

$$q_i(t) \geq (n! - t + 1)/(i! \cdot (n - i)!).$$

Откуда сразу получаем, что

$$t \geq n! - q_i \cdot (i! \cdot (n - i)!) + 1. \quad (3)$$

С другой стороны $q_i(t) < (n! - t + 1)/(i! \cdot (n - i)!) + 1$. Следовательно, $t < n! - (q_i - 1) \cdot (i! \cdot (n - i)!) + 1$ и

$$t \leq n! - (q_i - 1) \cdot (i! \cdot (n - i)!). \quad (4)$$

Пусть $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ — номер слоя булевого куба. Обозначим $A_i = \{a \in E_i^n : \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1\}$, т.е. это множество наборов i -го слоя, где функция распределения принимает значение 1. Возьмем произвольный набор b принадлежащий i -ому слою куба. Через B_i^b обозначим множество всех n -перестановок переводящих набор b в b . Понятно, что $|B_i^b| = (i! \cdot (n - i)!)$. Пусть $a \in E_i^n$ и σ — некоторая перестановка переводящая b в a . Легко видеть, что множество $C_i^{ba} = \{\sigma\pi : \pi \in B_i^b\}$ есть множество всех перестановок, переводящих b в a . Множество $C_i^b = \bigcup_{a \in A_i} C_i^{ba}$ есть множество всех перестановок, переводящих b в наборы из A_i . Обозначим $D_i^b = \{\pi : \pi^{-1} \in C_i^b\}$. Очевидно

$$|D_i^b| = |A_i| \cdot (i! \cdot (n - i)!). \quad (5)$$

Достаточность. Возьмем произвольный слой E_i^n булевого куба и произвольный набор $b \in E_i^n$. Согласно условию $|A_i| = s \geq q_i(t)$. Возьмем произвольное множество перестановок M такое, что $|M| \geq t$. Согласно (3) имеем $|M| \geq t \geq n! - q_i(t) \cdot (i! \cdot (n - i)!) + 1$. Следовательно, согласно (5) хотя бы один элемент из множества D_i^b должен принадлежать и M . Пусть это будет перестановка π . Для нее верно

$$\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(b) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(b)) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1,$$

где $a \in A_i$. Следовательно, $X_M^{\mathcal{P}}(b) = 1$. Отсюда в силу произвольности выбора набора b и слоя E_i^n с учетом утверждения 1 получаем справедливость достаточного условия.

Необходимость. Предположим, что для некоторого номера $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ выполнено $|A_i| = s < q_i$. Возьмем произвольный набор $b \in E_i^n$. Рассмотрим множество $\Pi^n \setminus D_i^b$. Согласно (4)

$$|\Pi^n \setminus D_i^b| = n! - s \cdot (i! \cdot (n - i)!) \geq n! - (q_i - 1) \cdot (i! \cdot (n - i)!) \geq t. \quad (6)$$

Возьмем произвольное $M \subset \Pi^n \setminus D_i^b$ такое, что $|M| = t$. Согласно (6) это можно сделать. Поскольку для любой перестановки $\pi \in M$ имеем, что $\pi \notin D_i^b$, то $\pi^{-1}(b) \notin A_i$, и, значит, $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(b)) = \Omega_\pi^{\mathcal{P}}(b) = 0$. Откуда в силу произвольности π из M получаем $X_M^{\mathcal{P}}(b) = 0$. Следовательно, согласно утверждения 1 имеем, что $\mathcal{P}$ и M не согласованы.

Тем самым теорема 1 доказана.

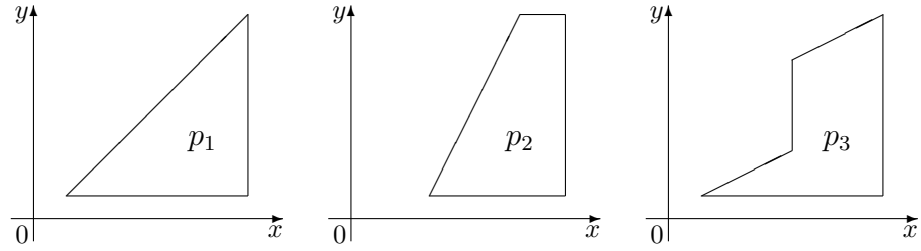


Рис. 1: Фигуры p_1 , p_2 , p_3 , разбивающие плоскость на 2^3 частей

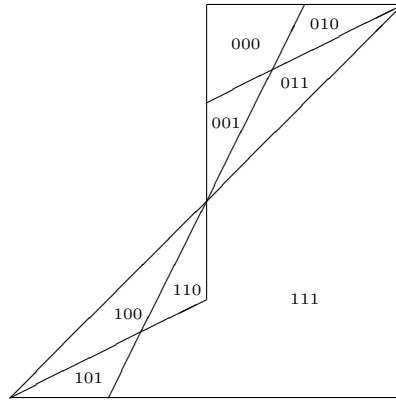


Рис. 2: Ступенька

4 Доказательство теоремы 2

Сначала приведем алгоритм разбиения плоскости на 2^n частей n фигурами.

Разбить плоскость на 4 части двумя фигурами легко, взяв любые две пересекающиеся не вложенные фигуры. Разбить плоскость на 8 частей тремя фигурами тоже не сложно. Но мы приведем одно специальное разбиение, которое будет базисом и основным вспомогательным элементом в построении нашего алгоритма.

Рассмотрим 3 фигуры приведенные на рисунке 1. Они разбивают плоскость на 2^3 частей. Если наложить эти фигуры друг на друга, то мы получим области разбиения, изображенные на рисунке 2. На этом рисунке внутри областей изображены их характеристические вектора. Здесь и далее при изображении булевых векторов мы будем опускать окружающие круглые скобки и запятые, например, вместо $(0,0,1)$ бу-

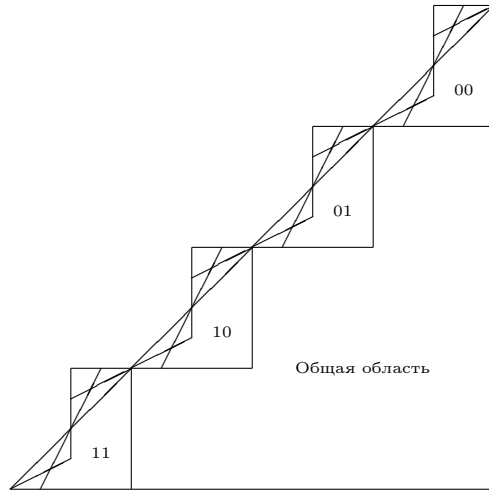


Рис. 3: Разбиение плоскости на 2^5 частей

дем писать 001. Отметим только, что в верхнем левом углу рисунка 2 добавлена подобласть с характеристическим вектором 000. Полученную конфигурацию с добавленной подобластью будем называть *ступенькой*.

Возьмем произвольное натуральное число $n > 3$. Построим фигуры $p_1, \dots, p_n$, делящие плоскость на 2^n частей следующим образом. Возьмем 2^{n-3} ступеньки и расположим их на диагонали друг за другом. Пример расположения ступенек при $n = 5$ приведен на рисунке 3. Каждой ступеньке сопоставим булев вектор длины $n - 3$, называемый кодом ступеньки, причем самой верхней ступеньке сопоставим код $0 \dots 00$, следующей сверху — $0 \dots 01$, и т.д., и самой последней, нижней, — $1 \dots 11$. Так на рисунке 3 внутри ступенек приведены коды ступенек. Далее продлим горизонтальную нижнюю линию нижней ступеньки вправо, а вертикальную правую линию верхней ступеньки вниз до пресечения с продленной горизонтальной линией. Полученную область под ступеньками назовем *общей областью*. Теперь определим характеристические вектора областей разбиения полученной конфигурации. Характеристическим вектором общей области будет вектор $1 \dots 1$, характеристическим вектором внешней области будет вектор $0 \dots 0$, характеристические вектора областей ступеньки получаются добавлением к коду ступеньки справа характеристического вектора соответствующей области ступеньки.

Так для ступеньки с кодом 01 характеристические вектора областей изображены на рисунке 4.

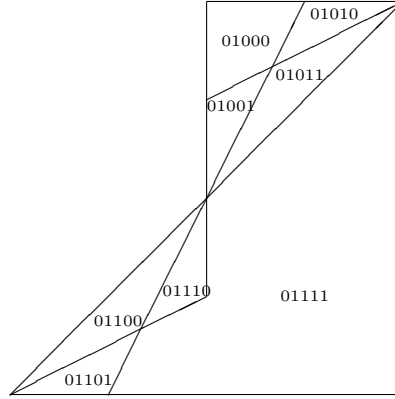


Рис. 4: Характеристические вектора ступеньки с кодом 01

Характеристические вектора областей разбиения однозначно определяют каждую из базисных фируг, а именно фигура p_i есть объединение областей разбиения, у которых в характеристическом векторе на i месте стоит 1.

Так на рисунке 5 приведены базисные фигуры, определяемые введенными ранее характеристическими векторами областей разбиения, приведенных на рисунке 3.

Легко видеть, что каждая из первых $n - 3$ базисных фигур есть объединение общей области и 2^{n-4} ступенек, и тем самым представляет собой псевдовыпуклый многоугольник с не более чем $3 \cdot 2^{n-4} + 2 \cdot (2^{n-4} - 1) + 2 = 5 \cdot 2^{n-4}$ углами. Причем $5 \cdot 2^{n-4}$ углов имеет только первая фигура.

Фигура p_{n-2} есть объединение общей области и 2^{n-3} треугольников вида треугольника p_1 , изображенного на рисунке 1, и тем самым — это треугольник.

Фигура p_{n-1} есть объединение общей области и 2^{n-3} трапеций вида трапеции p_2 , изображенной на рисунке 1, и тем самым — это псевдовыпуклый многоугольник с $2 \cdot 2^{n-3} + 2 = 2^{n-2} + 2$ углами.

Фигура p_n есть объединение общей области и 2^{n-3} пятиугольников вида пятиугольника p_3 , изображенного на рисунке 1, и тем самым — это псевдовыпуклый многоугольник с $2 \cdot 2^{n-3} + 3 = 2^{n-2} + 3$ углами.

Тем самым, каждая из базисных фигур представляет собой псевдовыпуклый многоугольник с не более чем $2^{n-2} + 3$ углами при $n = 4, 5$ и с не более чем $5 \cdot 2^{n-4}$ углами при $n > 5$.

Отметим, что в работе [3] также предлагается алгоритм построения

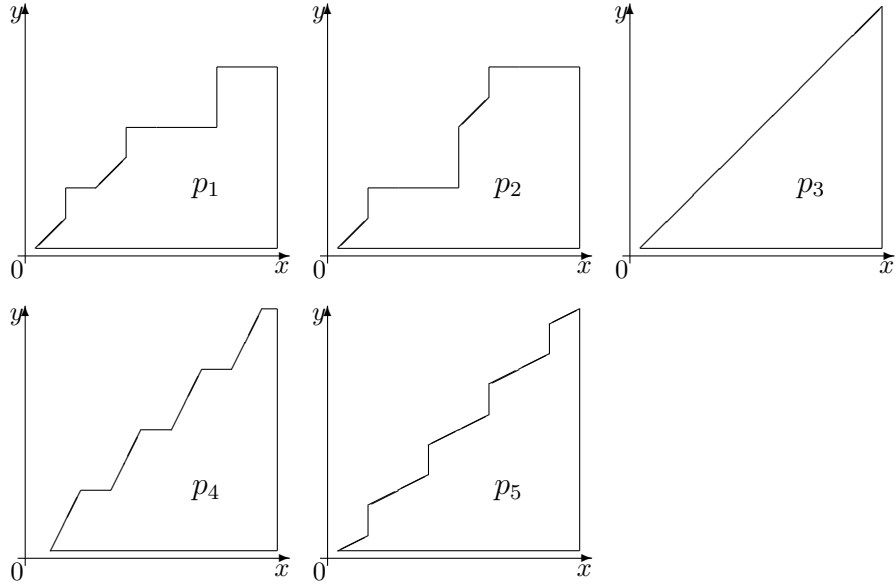


Рис. 5: Фигуры, разбивающие плоскость на 2^5 частей

фигур, разбивающих плоскость на 2^n областей, но построенные там фигуры не являются псевдовыпуклыми и имеют большее число углов при $n > 4$.

Пусть теперь у нас имеется произвольная булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $f(0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1) = 1$. Построим такое множество базисных фигур $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$. Отметим сразу, что случай функции $f \equiv 1$ соответствует разбиению на 2^n областей и мы его уже рассмотрели, поэтому имеет смысл рассматривать только случай $f \not\equiv 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $n = 2$. Если вектор значений функции f имеет вид 1001, то базисные фигуры — это любые две совпадающие фигуры. Во всех остальных случаях — это две разные фигуры, вложенные одна в другую.

Теперь рассмотрим случай $n > 2$. Посмотрим на ступеньку, изображенную на рисунке 2. В ней 8 областей, помеченных булевыми векторами длины 3, которые будем интерпретировать как номер области.

Пусть нам дано разбиение плоскости на области, какое мы описывали выше и которое приведено на рисунке 3, с характеристическими векторами, описанными ранее. Возьмем произвольную ступеньку с кодом $i_1 \dots i_{n-3}$. Для случая $n = 3$ мы берем нашу единственную ступеньку

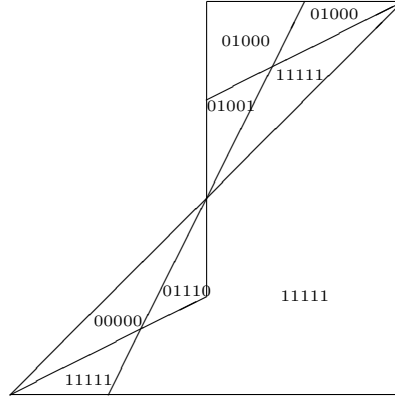


Рис. 6: Новые характеристические вектора ступеньки с кодом 01 для функции 11000010

и можем считать, что у нее код длины 0. Будем менять характеристические вектора областей выбранной ступеньки в зависимости от значений функции f следующим образом.

Если $f(i_1, \dots, i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 1$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки не меняется, то есть остается равным $i_1 \dots i_{n-3}i_{n-2}i_{n-1}i_n$.

Если $f(i_1, \dots, i_{n-3}, 1, 1, 1) = 0$, то характеристический вектор области 111 рассматриваемой ступеньки меняем на $11 \dots 1$.

Далее, если $i_{n-2}i_{n-1}i_n \in \{000, 100\}$ и $f(i_1, \dots, i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 0$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки меняем на $00 \dots 0$.

Далее, если $i_{n-2}i_{n-1}i_n \in \{001, 010\}$ и $f(i_1, \dots, i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 0$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки меняем на характеристический вектор области 000 рассматриваемой ступеньки.

Наконец, если $i_{n-2}i_{n-1}i_n \in \{011, 101, 110\}$ и $f(i_1, \dots, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 0$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки меняем на характеристический вектор области 111 рассматриваемой ступеньки.

В качестве примера на рисунке 6 изображены новые характеристические вектора ступеньки с кодом 01 в случае, когда вектор значений функции $f(0, 1, x_3, x_4, x_5)$ имеет вид 11000010.

Проделав эту операцию для каждой ступеньки, мы определим харак-

теристические вектора всех областей разбиения. Как и ранее, характеристические вектора областей разбиения однозначно определяют каждую из базисных фигур, а именно фигура p_i есть объединение областей разбиения, у которых в характеристическом векторе на i месте стоит 1.

Легко видеть, что каждая из базисных фигур останется псевдовыпуклым многоугольником. Посмотрим насколько может увеличиться количество углов фигуры.

Как и ранее, каждая из первых $n - 3$ базисных фигур есть объединение общей области и 2^{n-4} ступенек, но если ранее каждая присутствующая ступенька давала 3 угла, а отсутствующая — 2, то теперь каждая присутствующая ступенька может давать до 6 углов, а отсутствующая ступенька за счет увеличения общей области может также давать до 6 углов. Здесь и далее самый нижний угол ступеньки будем относить к текущей ступеньке, а самый верхний — к следующей ступеньке. 6 углов у присутствующей ступеньки мы получаем, например, если функция f принимает значение 0 на областях 000 и 100 данной ступеньки, а 6 углов, добавленных к общей области, мы получаем, если функция f принимает значение 0 на областях 011 и 111 данной ступеньки. Легко проверяется, что никакая ступенька не может давать более 6 углов. Учитывая 2 угла на правой границе фигуры, получаем, что число углов может достигнуть $6 \cdot 2^{n-3} + 2$.

Фигура p_{n-2} может превратиться в $(4 \cdot 2^{n-3} + 2)$ -угольник, если функция f будет принимать значение 0 на областях 100 и 011 каждой ступеньки.

Фигура p_{n-1} может превратиться в $(3 \cdot 2^{n-3} + 2)$ -угольник, если функция f будет принимать значение 0 на области 101 каждой ступеньки.

Фигура p_n может превратиться в $(3 \cdot 2^{n-3} + 3)$ -угольник, если функция f будет принимать значение 0 на области 110 или на области 001 каждой ступеньки.

Тем самым, каждая из базисных фигур представляет собой псевдовыпуклый многоугольник с не более чем $6 \cdot 2^{n-3} + 2$ углами.

Теорема 2 доказана.

5 Примеры согласованных множеств

Доказательство теоремы 3.

Пусть k, n — произвольные натуральные числа, такие, что $k < n$.

Рассмотрим множество $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, где p_i , $i = k+1, \dots, n$, разбивают плоскость на 2^{n-k} частей и строятся по алгоритму, который был приведен ранее в доказательстве теоремы 2; p_i , $i = 1, \dots, k$, — треугольники, для которых верно $p_1 \subset p_2 \subset \dots \subset p_k \subset \bigcap_{j=k+1}^n p_j$.

Легко видеть, что $R(\mathcal{P}) = 2^{n-k} + k$ и, как было показано в доказательстве теоремы 2, каждая фигура $p_i \in \mathcal{P}$ имеет не более чем $\max(2^{n-2} + 3, 5 \cdot 2^{n-4})$ углов.

Отметим, что предикат $\bar{p}_1 \& \bar{p}_2 \& \dots \& \bar{p}_k$ определяет дополнение к фигуре p_k и эта область делится фигурами $p_{k+1}, \dots, p_n$ на 2^{n-k} частей. Отсюда сразу следует, что для любого булевого вектора вида $a = (0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$ верно $\Omega_{\varepsilon}^{\mathcal{P}}(a) = 1$. Предикат $\bar{p}_1 \& \dots \& \bar{p}_s \& p_{s+1} \& \dots \& p_n$, где $s < k$, определяет фигуру $p_{s+1} \setminus p_s$ и эта фигура не пуста. Следовательно, для любого булевого вектора a , у которого на первых s ($s < k$) местах стоят 0, а на остальных стоят 1, выполнено $\Omega_{\varepsilon}^{\mathcal{P}}(a) = 1$.

Обозначим через δ_j^i транспозицию, которая переставляет j -ый элемент с i -ым, здесь $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $T_r^i = \{\delta_j^i : r \leq j \leq n\} \cup \{\delta_i^i\}$.

$Q_r = \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r : \sigma_i \in T_{r+1}^i, i = 1, 2, \dots, r\}$ — множество перестановок, полученных произведением транспозиций. Это множество перестановок позволяет переставить первые r элементов с любыми из оставшихся, либо оставить любой из первых r элементов на месте. Понятно, что $|Q_r| = (n - r + 1)^r$. Заметим также, что множество Q_{r-1} содержит $(n - r + 1)^{r-1}$ элементов из множества Q_r . Поэтому $|Q_{r-1} \setminus Q_r| = (n - r + 2)^{r-1} - (n - r + 1)^{r-1}$. Обозначим $Q'_r = \{\pi^{-1} : \pi \in Q_r\}$.

Рассмотрим множество перестановок $M = \bigcup_{r=1}^k Q'_r$.

Поскольку $M = Q'_k \sqcup \bigsqcup_{r=1}^{k-1} (Q'_r \setminus Q'_{r+1})$, то

$$|M| = (n - k + 1)^k + \sum_{r=1}^{k-1} ((n - r + 1)^r - (n - r)^r).$$

Осталось показать, что множество M согласовано с $\mathcal{P}$.

Возьмем произвольный вектор $a \in E^n$. Для того, чтобы множество перестановок M было согласовано с $\mathcal{P}$, должна существовать перестановка $\pi \in M$, для которой $\Omega_{\pi}^{\mathcal{P}}(a) = \Omega_{\varepsilon}^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(a)) = 1$.

Пусть количество нулей в a равно $s \geq k$. Необходимо найти перестановку π^{-1} , которая переводит a в набор, где первые k элементов являются нулями. Но по определению в Q_k такая перестановка есть, и, значит, $\pi \in M$.

Пусть количество нулей в a равно $s < k$. По определению в Q_s есть такая перестановка π^{-1} , которая переводит нули вектора a на первые s мест. Следовательно, $\pi \in M$ и $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(a)) = 1$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $k_1, \dots, k_r, n$ — произвольные натуральные числа, такие, что $\sum_{i=1}^r k_i \leq n$.

Если $A \subseteq E^k, B \subseteq E^m$, то обозначим

$$A \times B = \{(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \in E^{k+m} : (a_1, \dots, a_k) \in A, (b_1, \dots, b_m) \in B\}.$$

Пусть $z_i^k = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in E_i^k$ и $Z_k = \{z_i^k : i \in \{0, 1, \dots, k\}\} \subset E^k$, то есть $|Z_k| = k + 1$ и для любого $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ верно $|Z_k \cap E_i^k| = 1$.

Пусть $F = Z_{k_1} \times Z_{k_2} \times \dots \times Z_{k_r} \times E^{n - \sum_{i=1}^r k_i} \subset E^n$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, принимающая значение 1 в точности на наборах из множества F . Заметим, что $f(0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1) = 1$.

С помощью алгоритма, приведенного в доказательстве теоремы 2, построим такое множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$. Заметим, что $R(\mathcal{P}) = |F| = (k_1 + 1) \cdot \dots \cdot (k_r + 1) \cdot 2^{n - \sum_{i=1}^r k_i}$.

Пусть M множество всевозможных перестановок, которые меняют между собой отдельно первые k_1 элементов, отдельно следующие k_2 элементов и т.д., а последние $n - \sum_{i=1}^r k_i$ элементов оставляют на месте. Понятно, что $|M| = k_1! \cdot \dots \cdot k_r!$.

Покажем, что множества $\mathcal{P}$ и M согласованы.

Возьмем произвольный вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in E^n$. Пусть в векторе a на первых k_1 позициях стоят l_1 единиц, на позициях от $k_1 + 1$ до k_2 стоят l_2 единиц, и т.д., и наконец на позициях от $k_{r-1} + 1$ до k_r стоят l_r единиц. Пусть $b = (a_{k_r+1}, \dots, a_n)$. Рассмотрим вектор $z = z_{l_1}^{k_1} \dots z_{l_r}^{k_r} b \in F$. Понятно, что в множестве M есть такая перестановка π , что перестановка π^{-1} переводит вектор a в вектор z . Поскольку $z \in F$, то $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(a)) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(z) = 1$. Следовательно, согласно утверждению 1 множества $\mathcal{P}$ и M согласованы.

Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] Рвачев В. Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // ДАН СССР. — 1963. — Т. 153, № 4. — С. 765–767.
- [2] Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике — Киев: Наукова думка, 1974.
- [3] Гасанов Э. Э., Шакиров А. А. О предикатной эквивалентности формул алгебры логики // Интеллектуальные системы. — 1997. — Т. 2, вып. 1-4. — С. 231–248.
- [4] Шакиров А. А. Логико-алгебраические способы описания геометрических фигур // Канд. дисс. — М. 1997.
- [5] Шакиров А. А. О методах перехода от логического описания геометрических фигур к аналитическому // Интеллектуальные системы. — 1998. — Т. 3, вып. 1–2. — С. 327–337.
- [6] Шакиров А. А. К логическому описанию геометрических фигур // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. — Т. 5, вып. 4. — С. 1191–1197.
- [7] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста — М.: Наука, 1966.
- [8] Кудрявцев В. Б., Блохина Г. Н., Кнап Ж., Кудрявцев В. В. Алгебра логики — М.: Изд-во мех-мат МГУ, 2006.