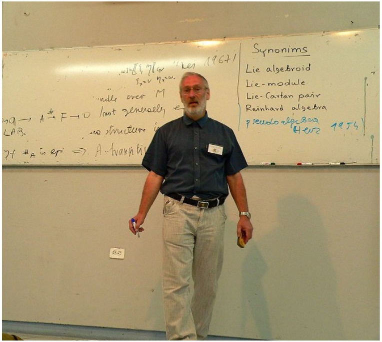
Гомотопическая классификация транзитивных алгеброидов Ли.

А.С.Мищенко (Москва)

Доклад на международной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория», Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, 15.09.2016–18.09.2016

Jan Kubarski

Доклад посвящается светлой памяти моего друга и соавтора профессора Яна Кубарского



Jan Kubarski
Polytechnical University,
Lodz, Poland

Аннотация

Доклад посвящен изложению результатов группы исследователей по транзитивным алгеброидам Ли. Эта программа была инициирована безвременно ушедшим профессором политехнического университета в Лодзи (Польша) Яном Кубарски, который совместно с автором начал изучение сигнатур транзитивных алгеброидов Ли в 2003 году.

J.Kubarski, A.S. Mishchenko, *Lie algebroids: Spectral sequences and signature*, Doklady Mathematics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2003, t. 68, No.2, p. 188-190

Аннотация

В целом программа исследований может быть описана как гомотопическая классификация транзитивных алгеброидом Ли при фиксированном многообразии в качестве базы и фиксированной конечно мерной алгебре Ли, в качестве слоя присоединенного к транзитивному алгеброиду Ли расслоения.

Аннотация

Еще в книге Маккензи

K.C.H. Mackenzie.
General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids.
Cambridge University Press, 2005.

было установлено, что если расслоение L с типичным слоем конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и структурной группой автоморфизмов этого слоя допускает каплинг $\sharp$ с касательным расслоением TM многообразия M , то тогда такое расслоение L расширяется до транзитивного алгеброида Ли, у которого данное расслоение L присоединено к полученному алгеброиду Ли, при условии тривиальности препятствия Маккензи в виде трехмерного класса когомологий $obs(\sharp) \in H^3(M; ZL)$ с коэффициентами в плоском расслоении ZL .

Аннотация

Для завершения гомотопической классификации транзитивных алгеброидов Ли нужно решить следующие две задачи:

- Найти необходимые и достаточные условия в гомотопических терминах существования каплинга для заданного расслоения L,
- Описать условия тривиальности препятствия Маккензи.

Обе эти задачи в книге Маккензи ([1]) не ставились и не обсуждались. Доклад посвящен решению сформулированных задач.

Аннотация

Первая задача решена полностью:

- Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko *Classification of Couplings for Transitive Lie Algebroids*, Doklady Mathematics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), t. 91, No.1, p. 84-86, 2015
- Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko *The existence and classification of couplings between Lie algebrabundles and tangent bundles*, Topology and its Applications, Elsevier BV (Netherlands), t. 200, p. 1-18, 2016

Аннотация

В рамках второй задачи о вычислении препятствия Маккензи показана функториальность препятствия Маккензи:

А.С.Мищенко, Сяоюй Ли *Транзитивные алгеброиды Ли. Категорная точка зрения*, Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том.20, № 2, с.133–156

Аннотация

В некоторых частных случаях

- Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko, V.Gasimov *Mackenzie obstruction for the existence of a transitive Lie algebroid,* Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), t. 21, No.4, p. 544-548, 2014
- Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko, Leanh Nguyen *Some results on the Mackenzie obstruction for transitive Lie algebroids,* Preprint of joint scientific project No: 71NC /2015/VNCCCT on the VIASM (Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics), 2016

показана тривиальность препятствия Маккензи.

Аннотация

В заключение мы обсуждаем конечномерный аналог описания препятствия Маккензи как задачу построения расширения конечномерной алгебры Ли при помощи другой алгебры Ли. Соответствующее препятствие тоже является 3-х мерным классом когомологий и было впервые рассмотрено Хохшильдом в 1954 г.

Hochschild, G., *Cohomology Classes of Finite Type and Finite Dimensional Kernels for Lie Algebras,* "Amer. J. Math. 1954, v. 76, No. 4, p. 763-778.

Аннотация

Бесконечномерный случай такого расширения был изучен в диссертации Валаса

W.Walas *Algebry Liego-Rineharta i pierwsze klasy charakterystyczne.* Praca doktorska napisana pod kierunkiem dra hab. Jana Kubarskiego prof. Politechniki **Ł***ódzkiej*, Politechnika **Ł***ódzka*, Institut Matematyki, **Ł***ódź*, 2007.

Введение

Под алгеброидом Ли мы будем понимать конечномерное векторное расслоение $E \to M$ над гладким многообразием M вместе с его гомоморфизмом $a : E \to TM$ в касательное расслоение TM , называемым анкором,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "a"] \arrow[d] & TM \arrow[d] \\ M \arrow[r, "="'] & M. \end{tikzcd}$$

Введение

Пространство $\Gamma^\infty(E)$ гладких сечений снабжено дополнительной структурой, коммутаторной скобкой $\{\bullet,\bullet\}$, которая удовлетворяет естественным свойствам структуры бесконечно мерной алгебры Ли, а также тождеству Лейбница по отношению к операции умножения сечения на гладкую функцию:

- Для любых гладких сечений $\sigma,\tau\in\Gamma^\infty(A;M)$ и гладкой функции $f\in C^\infty(M)$ имеет место тождество Лейбница

$$[\sigma, f\tau] = f[\sigma,\tau] + a(\sigma)(f)\tau.$$

Введение

Анкор при этом индуцирует гомоморфизм алгебры Ли $\Gamma^{\infty}(E)$ в алгебру Ли $\Gamma^{\infty}(TM)$ векторных полей на многообразии M :

$$a : \Gamma^{\infty}(A; M) \to \Gamma^{\infty}(TM; M)$$

Введение

Примерами алгеброидов Ли служит само касательное расслоение TM , расслоение $\mathcal{D}(L)$ всех ковариантных дифференцирований гладких сечений $\Gamma^{\infty}(L)$ любого конечномерного векторного расслоения L над гладким многообразием M , а также касательное расслоение произвольного гладкого слоения $\mathcal{F}$ на многообразии M без особых точек. В случае, когда анкор a является послойно сюръективным отображением, алгеброид Ли называется транзитивным.

Введение

Транзитивные алгеброиды Ли обладают такими специфическими свойствами, которые позволяют смотреть на транзитивные алгеброиды Ли как на элементы объектов гомотопического функтора. Грубо говоря, каждый транзитивный алгеброид Ли может описываться в виде векторного расслоения над касательным расслоением к многообразию, которое оснащено дополнительной структурой.

Введение

В целом программа исследований может быть описана как гомотопическая классификация транзитивных алгеброидом Ли при фиксированном многообразии в качестве базы и фиксированной конечно мерной алгебре Ли, в качестве слоя присоединенного к транзитивному алгеброиду Ли расслоения.
Транзитивные алгеброиды Ли детально исследовались в книге К.Маккензи.

Введение

В частности, там показано, что гладкие отображения многообразий порождают обратный образ (pullback) транзитивных алгеброидов Ли, который зависит только от гомотопического класса отображения. Из этого наблюдения вытекает, что классификация транзитивных алгеброидов Ли сводится к построению финальных объектов для каждой фиксированной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, присоединенной к транзитивному алгеброиду Ли, а сама классификация является гомотопической. И хотя это естественное наблюдение очевидно, само построение финальных объектов до сих пор не было проведено.

Введение

В книге Маккензи ([1])

Mackenzie, K.C.H., *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press,(2005)

было установлено, что если расслоение L со слоем конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и структурной группой автоморфизмов этого слоя допускает каплинг $\sharp$ с касательным расслоением TM многообразия M,

Введение

то при наличии каплинга такое расслоение L расширяется до транзитивного алгеброида Ли, у которого данное расслоение L присоединено к полученному алгеброиду Ли, при условии тривиальности препятствия Маккензи в виде трехмерного класса когомологий $obs(\sharp) \in H^3(M; ZL)$ с коэффициентами в плоском расслоении ZL .

Введение

Для завершения гомотопической классификации транзитивных алгеброидов Ли надо решить две задачи:
1) Найти необходимые и достаточные условия существования каплинга для заданного расслоения L и
2) описать условия тривиальности препятствия Маккензи.
Обе эти задачи в книге Маккензи не ставились и не обсуждались.

Введение

Доклад посвящен изложению результатов группы исследователей по транзитивным алгеброидам Ли. Эта программа была инициирована безвременно ушедшим профессором политехнического университета в Лодзи (Польша) Яном Кубарски, который совместно с автором начал изучение сигнатур транзитивных алгеброидов Ли в 2003 году.

Введение

Мы доказываем ([1], [2], [3]),

Xiaoyu Li, Alexander S. Mishchenko *The Existence of Coupling in the Category of Transitive Lie Algebroid, ArXiv e-prints, 1306.5449, 2013, p. 1-8*

Xiaoyu Li, Alexander S. Mishchenko *Description of coupling in the category of transitive Lie algebroids, ArXiv e-prints, 1310.5824, 2013, p. 1-13*

Сяою Ли, А.С.Мищенко *Классификация каплингов для транзитивных адгеброидов Ли* Доклады РАН, Том 460, № 5, с. 517-519, 2014

Введение

что гомотопическая классификация сводится к построению финального пространства в виде классифицирующего пространства BG , где G есть группа $Aut(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с более тонкой, чем классическая, топологией. В частности, такой подход позволяет решить один из существенных вопросов для классификации транзитивных алгеброидов Ли, а именно, описать все каплинги между касательным расслоением к многообразию и векторному расслоению конечномерных алгебр Ли (LAB), которые являются базовым объектом при классификации транзитивных алгеброидов Ли в смысле Маккензи.

Введение

Другая проблема, которая при этом естественно возникает, это конкретное вычисление препятствия Маккензи в виде трехмерного класса когомологий для существования транзитивного алгеброида Ли, которую мы решаем, по крайней мере, частично.

Введение

Вся эта программа активно развивалась коллаборацией, в которой участвовали следующий математики: Вагиф Али-Мухтар Оглы Касимов (Бакинский государственный университет, Азербайджан), Сяою Ли (Харбинский технологический институт, Китай), А.С.Мищенко (Московский государствнный универстет им. М.И.Ломоносова), Ле Ань Нгуен (Национальный университет гражданской инженерии, Вьетнам), Жозе Рибейро Оливейра (Univeristет в Браге, Португалия), Роберт Волак (Ягеллонский университет, Польша)([?]– [2]).

Введение

Без участия всех членов коллаборации вряд ли было возможным решение ключевых проблем программы и формулировки оставшихся вопросов.
Доклад посвящен решению сформулированных задач.
Первая задача решена полностью ([1], [2], [3], [1], [2]). В рамках второй задачи о вычислении препятствия Маккензи показана его функториальность ([1])и показана его тривиальность в некоторых частных случаях ([1],[2]).

Постановка задачи

В соответствии с определениями из книги Маккензи [1], под алгебраическим алгеброидом Ли мы будем понимать конечномерное векторное расслоения E над многообразием M вместе с дополнительной структурой в пространстве гладких сечений $\Gamma^{\infty}(M, E)$ расслоения E . Эта структура является коммутаторной скобкой $\{\bullet, \bullet\}$ на бесконечномерном пространстве сечений $\Gamma^{\infty}(M, E)$.

Постановка задачи

Коммутаторная скобка $\{\bullet, \bullet\}$ задает на пространстве $\Gamma^\infty(M, E)$ структуру бесконечной алгебры Ли. Другими словами, коммутаторная скобка удовлетворяет следующим условиям:

- Косая коммутативность коммутаторной скобки: для любых двух сечений $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(E)$ имеет место соотношение

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = -\{\sigma_2, \sigma_1\} \in \Gamma^\infty(E), \tag{1}$$

- Билинейность коммутаторной скобки: для трех сечений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Gamma^\infty(E)$ и пары чисел λ_1, λ_2 имеет место соотношение

$$\{\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2, \sigma_3\} = \lambda_1\{\sigma_1, \sigma_3\} + \lambda_2\{\sigma_2, \sigma_3\}. \tag{2}$$

Постановка задачи

- Тождество Якоби: для трех сечений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Gamma^\infty(E)$ имеет место соотношение

$$\{\sigma_1, \{\sigma_2, \sigma_3\}\} + \{\sigma_3, \{\sigma_1, \sigma_2\}\} + \{\sigma_2, \{\sigma_3, \sigma_1\}\} = 0, \qquad (3)$$

Тождество Якоби полезно интерпретировать как правило Лейбница по отношению к операции коммутирования $\{\bullet, \bullet\}$, т.е. присоединенного представления

$$\mathbf{ad}_{\sigma_1}(\sigma_2) = \{\sigma_1, \sigma_2\}.$$

Постановка задачи

Надо заменить скобку $\{\bullet,\bullet\}$, на оператор

$$\mathbf{ad}_{\sigma_1}(\sigma_2) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

в тождестве Якоби

$$\{\sigma_1, \{\sigma_2, \sigma_3\}\} = \{\{\sigma_1, \sigma_2\}, \sigma_3\} + \{\sigma_2, \{\sigma_1, \sigma_3\}\} = 0, \tag{4}$$

т.е.

$$\mathbf{ad}_{\sigma_1}(\{\sigma_2, \sigma_3\}) = \{\mathbf{ad}_{\sigma_1}(\sigma_2), \sigma_3\} + \{\sigma_2, \mathbf{ad}_{\sigma_1}(\sigma_3)\} = 0. \tag{5}$$

Постановка задачи

Вообще, если задана двухместная операция типа $\langle \bullet, \bullet \rangle : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_3$, то операция $A_i : E_i \longrightarrow E_i$ называется операцией дифференцирования или деривацией по отношению к двуместной операции $\langle \bullet, \bullet \rangle$, если выполнено правило Лейбница

$$A_3 \langle u, v \rangle = \langle A_1 u, v \rangle + \langle u, A_2 v \rangle, \quad u \in E_1, \quad v \in E_2.$$

Постановка задачи

В нашем случае кроме коммутаторной скобки $\{\bullet,\bullet\}$ имеется еще и другая двухместная операция

$$(\bullet\cdot\bullet): C^{\infty}(M)\times\Gamma^{\infty}(E)\longrightarrow\Gamma^{\infty}(E),$$

операция умножения сечения $\sigma\in\Gamma^{\infty}(E)$на гладкую функцию $f\in C^{\infty}(M)$. При этом каждому сечению $\sigma\in\Gamma^{\infty}(E)$ сопоставляется операция $a(\sigma): C^{\infty}(M)\longrightarrow C^{\infty}(M)$ таким образом, что

$$\mathbf{ad}_{\sigma_1}(f\sigma_2)=a(\sigma_1)(f)\cdot\sigma_2+f\cdot\mathbf{ad}_{\sigma_1}(\sigma_2),$$

что дает дополнительное условие на коммутаторную скобку:

- Правило Лейбница для умножения сечения σ_2 на функцию f :

$$\{\sigma_1,f\sigma_2\}=a(\sigma_1)(f)\cdot\sigma_2+f\cdot\{\sigma_1,\sigma_2\}. \qquad (6)$$

Постановка задачи

Операция $a(\sigma)$ является операцией дифференцирования в пространстве гладких функций, т.е. операция $a(\sigma)$ является векторным полем, является сечением касательного расслоения TM , $a(\sigma) \in \Gamma^{\infty}(TM)$. Соответствие a является послойным гомоморфизмом расслоений

$$a : E \longrightarrow TM,$$

причем гомоморфизм a индуцирует гомоморфизм алгебр Ли

$$a : \Gamma^{\infty}(E) \longrightarrow \Gamma^{\infty}(TM),$$

$$a\{\sigma_1, \sigma_2\} = [a(\sigma_1), a(\sigma_2)] \qquad (7)$$

Постановка задачи

Гомоморфизм $a(\sigma) \in \Gamma^\infty(TM)$ называется *анкором* алгеброида Ли. Таким образом, алгеброид Ли задается при помощи коммутативной диаграммы и коммутаторной скобки

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{tikzcd} E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p_E"'] & TM \arrow[d, "p_T"] \\ M \arrow[r] & M \end{tikzcd} ; \{\bullet, \bullet\} \right\}, \tag{8}$$

которые удовлетворяют перечисленным условиям (1,2,3,6) (см. (Mackenzie,[1], definition 3.3.1, Kubarski,[?], definition 1.1.1)).

Постановка задачи

В случае, когда анкор a является послойным эпиморфизмом, соответствующий алгеброид Ли называется транзитивным алгеброидом Ли. Именно этот случай и будет предметом наших исследований. Для транзитивного алгеброида Ли имеет место так называемая точная последовательность Атья

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \xrightarrow{a} TM \longrightarrow 0, \tag{9}$$

у которой ядро анкора $\mathbf{Ker}\,(a)$ образует конечномерное расслоение $L = \mathbf{Ker}\,(a)$, называемое присоединенным расслоением транзитивного алгеброида Ли $\mathcal{A}$.

Постановка задачи

Можно проверить, пользуясь свойствами (1,2,3,6), что расслоение L является локально тривиальным расслоением, слой которого изоморфен некоторой конечномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а структурная группа является группой $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. (см. Mackenzie, [1], Definition 3.3.8, Theorem 6.5.1). Всякое локально тривиальной расслоение (безотносительно к алгеброиду Ли), слой которого изоморфен некоторой конечномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а структурная группа является группой $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется LAB (Lie algebra bundle) расслоением. Так что, присоединенное расслоение транзитивного алгеброида Ли $\mathcal{A}$ является LAB расслоением.

Постановка задачи

Из точности последовательности Атьи (9) следует, что расслоение E расщепляется в прямую сумму двух векторных расслоений, именно, касательного расслоения TM и присоединенного расслоения L ,

$$E \approx L \oplus TM,$$

при помощи произвольно выбранного расщепления $\lambda : TM \longrightarrow E$, $a \cdot \lambda = \mathbf{Id}$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\approx"] & TM \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\lambda"'] & 0 \\ & & L \oplus TM & & \end{tikzcd}$$

Постановка задачи

Тогда всякое сечение $\sigma \in \Gamma^{\infty}(E)$ представляется в виде пары сечений

$$\sigma = (u, X), \quad u \in \Gamma^{\infty}(L), \quad X \in \Gamma^{\infty}(TM).$$

$$X = a(\sigma), \quad u = \sigma - \lambda(a(\sigma)),$$

где $X \in \Gamma^{\infty}(TM)$ есть ничто иное, как обыкновенное векторное поле на многообразии M .

Постановка задачи

Коммутаторная скобка для пары сечений $\sigma_1 = (u_1, X_1), \quad \sigma_2 = (u_2, X_2)$ может быть записана формально в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma_1, \sigma_2\} = & \ \{(u_1, X_1), (u_2, X_2)\} = \\ = & \left([u_1, u_2] + \nabla_{X_1}(u_2) - \nabla_{X_2}(u_1) + \Omega(X_1, X_2), [X_1, X_2]\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Постановка задачи

В правой части записи (10) первое слагаемое $[u_1, u_2]$ является послойным коммутатором двух сечений u_1 и u_2 . Операция

$$\nabla_X : \Gamma^\infty(L) \longrightarrow \Gamma^\infty(L)$$

является ковариантным градиентом послойных дифференцирований сечений, которые подчиняются правилу Лейбница по отношению двуместной операции коммутирования сечений:

Постановка задачи

$$\begin{cases} \nabla_X(u) = \{\lambda(X), u\}, \quad u \in \Gamma^\infty(L), \\ \nabla_X(f \cdot u) = X(f) \cdot u + f \cdot \nabla_X(u), \quad u \in \Gamma^\infty(L), \quad f \in C^\infty(M), \\ \nabla_X([u_1, u_2]) = [\nabla_X(u_1), u_2] + [u_1, \nabla_X(u_2)] \quad u_1, u_2 \in \Gamma^\infty(L). \end{cases} \tag{11}$$

Такой ковариантный градиент ∇ будем называть линейной связностью дериваций в расслоении L конечномерных алгебр Ли (LAB).

Постановка задачи

Два соотношения на операцию ∇ и форму Ω:

И, наконец, последнее слагаемое

$$\Omega(X_1, X_2) \in \Gamma^\infty(L)$$

является классической двумерной дифференциальной формой, но со значениями в слоях расслоения L,

$$\Omega(X_1, X_2) = \{\lambda(X_1), \lambda(X_2)\} - \lambda([X_1, X_2]). \tag{12}$$

Применяя условия (1),(2),(3),(6) к правой части формулы (10), получаются следующие два соотношения на операцию ∇ и форму Ω :

Постановка задачи

Тензор кривизны R^{∇} ковариантного градиента ∇.

Через R^{∇} обозначим так называемый тензор кривизны ковариантного градиента ∇ , который определяется следующей универсальной формулой

$$R^{\nabla}_{X_1,X_2} = [\nabla_{X1}, \nabla_{X2}] - \nabla_{[X_1,X_2]}, \tag{13}$$

где X_1 , X_2 - два произвольных векторных поля.

Постановка задачи

Оператор $R^{\nabla}_{X_1,X_2}:\Gamma^{\infty}(L)\longrightarrow\Gamma^{\infty}(L)$ в действительности является гомоморфизмом векторного расслоения L , поскольку для любого сечения $\sigma\in\Gamma^{\infty}(E)$ и любой функции $f\in C^{\infty}(M)$ выполнено условие

$$R^{\nabla}_{X_1,X_2}(f\cdot\sigma)=f\cdot R^{\nabla}_{X_1,X_2}(\sigma).$$

Постановка задачи

Более того, этот гомоморфизм можно интерпретировать как гомоморфизм

$$R^{\nabla}:\Lambda^2(TM)\longrightarrow \mathrm{Hom}(L,L),$$

который в силу (11) в каждой точке $x\in M$ удовлетворяет условию

$$R^{\nabla}_{X1,X_2}([u_1,u_2])=[R^{\nabla}_{X1,X_2}(u_1),u_2]+[u_1,R^{\nabla}_{X1,X_2}(u_2)]$$

для пары векторных полей X_1 , X_2 и пары векторов $u_1,u_2\in L_x$.

Постановка задачи

Другими словами гомоморфизм R^{∇} в действительности отображает расслоение $\Lambda^2(TM)$ в расслоение $\mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{Hom}(L, L)$ послойных дериваций по отношению к послойной коммутаторной скобке в расслоении L :

$$R^{\nabla} : \Lambda^2(TM) \longrightarrow \mathrm{Der}(L).$$

Постановка задачи

По определению для двумерной формы $\Omega(X_1, X_2) \in \Gamma^\infty(L)$ со значениями в слоях расслоения L ее дифференциал $d^\nabla \Omega$ по отношению к ковариантному градиенту ∇ задается по универсальной формуле:

$$d^\nabla \Omega(X_1, X_2, X_3) =$$

$$= \nabla_{X_1}(\Omega(X_2, X_3)) + \nabla_{X_2}(\Omega(X_3, X_1)) + \nabla_{X_3}(\Omega(X_1, X_2)) -$$

$$-\Omega([X_1, X_2], X_3) - \Omega([X_2, X_3], X_1) - \Omega([X_3, X_1], X_2), \tag{14}$$

где X_1, X_2, X_3 - три произвольных векторных поля.

Постановка задачи

Ковариантный градиент ∇ и форма Ω, которые задаются при помощи расщепления транзитивного алгеброида Ли по формулам (9) и (13), удовлетворяют следующим двум соотношениям:

1. Для двух векторных полей X_1, X_2 и сечения $u \in \Gamma^\infty(L)$ имеет место соотношение
$$R^\nabla(X_1, X_2)(u) = -[u, \Omega(X_1, X_2)]. \tag{15}$$
2. Для трех векторных полей X_1, X_2, X_3 имеем:
$$d^\nabla\Omega(X_1, X_2, X_3) = 0. \tag{16}$$

Построение транзитивного алгеброида Ли.

Рассмотрим конструкции, которые позволяют описывать транзитивные алгеброиды Ли в виде некоторого набора данных, таких, что гладкие отображения многообразий порождают функториальные свойства этого набора данных. Набор данных, описывающих транзитивный алгеброид Ли, заключается в следующем. Рассматривается гладкое многообразие M и конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируется векторное расслоение L над многообразием M со структурной группой $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (которая называется LAB). Фиксируется линейная ковариантная связность ∇ в расслоении L с условием закона Лейбница по отношению к послойной операции коммутирования и дифференциальная форма Ω размерности 2 со значениями в слоях расслоения L.

Построение транзитивного алгеброида Ли.

Набор данных $\mathcal{C} = \{L, \nabla, \Omega\}$ назовем "структурой транзитивного предалгеброида Ли"(или каплингом), если выполнены следующее условие между ∇ и Ω:

$$R^{\nabla}(X_1, X_2)(u) = -[u, \Omega(X_1, X_2)] \tag{17}$$

для произвольного сечения $u \in \Gamma^{\infty}(L)$ и произвольных векторных полей X_1, X_2.

Построение транзитивного алгеброида Ли.

Структура транзитивного предалгеброида Ли $\mathcal{C} = \{L, \nabla, \Omega\}$ позволяет разбить задачу классификации транзитивных алгеброидов Ли на две части: классификацию предалгеброидов Ли и вычисление условия (16)

$$d^{\nabla}\Omega(X_1, X_2, X_3) = 0,$$

которое описывается в виде тривиальности когомологического препятствия Маккензи $[d^{\nabla}\Omega] \in H^3(M; ZL)$:

$$[d^{\nabla}\Omega] = 0 \in H^3(M; ZL).$$

Начнем с описания структуры транзитивного предалгеброида Ли $\mathcal{C} = \{L, \nabla, \Omega\}$.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

С каждым расслоением L конечномерных алгебр Ли (LAB) можно связать алгеброид $\mathcal{D}_{Der}(L)\xrightarrow{a}TM$ всех ковариантных градиентов в расслоении L, являющихся деривациями по отношению к послойной операции коммутирования, в точной последовательности Атья которого

$$0\longrightarrow \mathrm{Der}(L)\longrightarrow\mathcal{D}_{Der}(L)\xrightarrow{a}TM\longrightarrow 0$$

первый член $\mathrm{Der}(L)$ является расслоением послойных дериваций расслоения L.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Расслоение $\mathcal{D}_{Der}(L)$ строится как объединение слоев, когда каждый слой $\mathcal{D}_{Der}(L)_x$ в точке $x \in M$ состоит из всех ковариантных дериваций (D, X) сечений расслоения L в точке $x \in M$. Слой расслоения $\mathcal{D}_{der}(L)_x$ имеет конечную размерность, поскольку он включен в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(L_x) \longrightarrow \mathcal{D}_{Der}(L)_x \longrightarrow T_x M \longrightarrow 0.$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

При этом ядро $\mathrm{Der}(L_x)$ состоит из операторов вида $(D, 0)$, удовлетворяющих условиям

$$D([u_1, u_2]) = [D(u_1), u_2(x)] + [u_1(x), D(u_2)], \quad u_1, u_2 \in \Gamma(L),$$

$$D(f \cdot u) = f(x) \cdot D(u),$$

$$u \in \Gamma(L) \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

т.е. состоящих из эндоморфизмов конечномерной алгебры Ли L_x.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Сечения $\Gamma^{\infty}(\mathcal{D}_{Der}(L)$, таким образом, это такие пары (D, X), где $D : \Gamma^{\infty}(L) \longrightarrow \Gamma^{\infty}(L)$ оператор дифференцирования, X – векторное поле на многообразии M, удовлетворяющие условию Лейбница по отношению к двум операциям: умножению сечения на функцию и послойному коммутатору двух сечений,

$$D(f \cdot u) = f \cdot D(u) + X(f) \cdot u, \quad f \in C^{\infty}(M), \quad u \in \Gamma^{\infty}(L),$$

$$D([u_1, u_2]) = [D(u_1), u_2] + [u_1, D(u_2)], \quad u_1, u_2 \in \Gamma^{\infty}(L).$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Коммутаторная скобка $\{\bullet,\bullet\}$ в алгеброиде Ли $\mathcal{D}_{Der}(L)$ задается по формуле

$$\{(D_1),(X_1),(D_2),(X_2)\}=([D_1,D_2],[X_1,X_2])$$

Тогда линейная связность дериваций ∇ есть гомоморфизм

$$\nabla: TM\longrightarrow\mathcal{D}_{der}(L),$$

обратный к анкору, т.е. расщепляющий точную последовательность Атья

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Der}(L) \arrow[r, "j"] & \mathcal{D}_{Der}(L) \arrow[r, "a"] & TM \arrow[l, bend right, "\nabla"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Точная последовательность Атья вместе с расщепляющим ковариантным градиентом ∇ включается в следующую диаграмму:

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & ZL \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"] & ZL \arrow[d, "i"] & & \\
 & L \arrow[r, "="] \arrow[d, "ad"] & L \arrow[d, "ad"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}(L) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\natural^0"] & \mathcal{D}_{Der}(L) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\natural"] & TM \arrow[r] \arrow[d, "="] \arrow[l, bend right, "\nabla"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Out}\,(L) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d] & \mathcal{D}_{Out}(L) \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[d] & TM \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right, "\Xi"'] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Здесь ZL – это расслоение центров расслоения L, $\mathcal{D}_{Out}(L)$ - транзитивный алгеброид, получающийся факторизацией гомоморфизма ad,

$$\mathcal{D}_{Out}(L) = \mathcal{D}_{Der}(L)/\mathbf{Im}\,(ad),$$

а $\Xi = \natural \cdot \nabla$ можно трактовать как ковариантный градиент в алгеброиде $\mathcal{D}_{Out}(L)$. Определение тензора кривизны R^{∇} пишется в виде коммутаторной операции:

$$R^{\nabla}_{X_1,X_2} = [\nabla_{X1}, \nabla_{X2}] - \nabla_{[X_1,X_2]},$$

которое можно переписать в терминах операции $\{\bullet, \bullet\}$:

$$\nabla_X = (\nabla_X, X),$$

$$(R^{\nabla}_{X_1,X_2}, 0) = \{(\nabla_{X1}, X_1), (\nabla_{X2}, X_2)\} - (\nabla_{[X_1,X_2]}, [X_1, X_2]).$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Поэтому эта формула естественно обобщается на случай расщепления произвольного транзитивного алгеброида Ли, в частности и для тензора кривизны ковариантного градиента Ξ по формуле

$$R^{\Xi}(X_1, X_2) = \{\Xi_{X_1}, \Xi_{X_2}\} - \Xi_{[X_1, X_2]}.$$

Все это означает, что тензоры кривизны R^{∇} и R^{Ξ} включаются в коммутативную диаграмму:

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "ad"] & \\
\mathrm{Der}(L) \arrow[d, "\natural^0"] & \Lambda^2 TM \arrow[l, "R^{\nabla}"'] \arrow[d, "="] \\
\mathbf{Out}\ (L) \arrow[d] & \Lambda^2 TM \arrow[l, "R^{\Xi}"'] \\
0 &
\end{tikzcd}
$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Поскольку в структуре транзитивного предалгеброида Ли выполняется соотношение на ковариантный градиент ∇ и дифференциальную форму Ω

$$R^{\nabla}(X_1, X_2)(u) = -[u, \Omega(X_1, X_2)],$$

т.е.

$$R^{\nabla} = ad \cdot \Omega.$$

Получаем условие $R^{\Xi} = 0$. Это условие означает, что ковариантный градиент

$$TM \xrightarrow{\Xi} \mathcal{D}_{Out}(L)$$

является гомоморфизмом алгеброидов Ли. Согласно Маккензи ковариантный градиент Ξ называется каплингом между касательным расслоением TM расслоением алгебр ЛИ (LAB) L

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

По каждому каплингу Ξ можно восстановить структуру транзитивного предалгеброида Ли ∇ и Ω, хотя и не однозначно. Именно, поскольку гомоморфизм $\natural$ является эпиморфизмом, для каплинга Ξ существует его поднятие в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{Der}(L) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\natural"] & TM \arrow[r] \arrow[d, "="] \arrow[l, bend right, "\nabla"'] & 0 \\
\mathcal{D}_{Out}(L) \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[d] & TM \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right, "\Xi"'] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Поскольку тензор кривизны R^{Ξ} равен нулю, то существует поднятие Ω в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "ad"] & \\
\mathrm{Der}(L) \arrow[d, "\natural^0"] & \Lambda^2TM \arrow[l, "R^\nabla"'] \arrow[ul, "\Omega"'] \\
0 &
\end{tikzcd}
$$

так что выполнено соотношение на структуру транзитивного предалгеброида Ли $R^{\nabla} = ad \cdot \Omega.$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Осталось проверить выполнение второго соотношения $d^{\nabla}\Omega = 0$ для получения транзитивного алгеброида Ли. Заметим, прежде всего, что дифференциал формы Ω коммутирует с дифференциалом тензора кривизны R^{∇}, который можно интерпретировать как дифференциальную форму $R^{\nabla} : \Lambda^2 TM \longrightarrow \mathrm{Der}(L)$ В расслоении $\mathrm{Der}(L)$ имеется ковариантная связность ∇^{der}, продолжающая связность ∇ по естественной формуле

$$\nabla_X(\varphi(u)) = \nabla_X^{der}(\varphi)(u) + \varphi(\nabla_X(u)).$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$
\begin{tikzcd}
ZL \arrow[d, "i"] & \\
L \arrow[d, "ad"] & \\
\mathrm{Der}(L) \arrow[d, "\natural^0"] & \Lambda^3 TM \arrow[ul, "d^{\nabla}\Omega"'] \arrow[l, "d^{\nabla^{der}}(R^{\nabla})"'] \\
0 &
\end{tikzcd}
$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Предложение

Имеет место тождество

$$d^{\nabla^{der}}(R^{\nabla}) = 0.$$

Поэтому гомоморфизм $d^{\nabla}\Omega$ подымается до гомоморфизма $d^{\nabla}\Omega \longrightarrow ZL$:

$$\begin{tikzcd}
ZL \arrow[d, "i"] & \\
L \arrow[d] & \Lambda^3 TM \arrow[l, "d^{\nabla}(\Omega)"'] \arrow[ul, "d^{\nabla}(\Omega)"'] \\
0 &
\end{tikzcd}$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Далее можно проверить, что

$$d^{\nabla}d^{\nabla}(\Omega) = d^{\nabla^{ZL}}d^{\nabla}(\Omega) = 0,$$

что означает, что форма $d^{\nabla}(\Omega)$ замкнута, и, следовательно, задает трехмерный класс когомологий

$$[d^{\nabla}(\Omega)] \in H^3(M; ZL).$$

Класс когомологий $Obs(\Xi, \nabla, \Omega) = [d^{\nabla}(\Omega)]$ называется препятствием Маккензи.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Theorem

Препятствие Маккензи $[d^{\nabla}(\Omega)]$ *зависит только от каплинга* $[\Xi]$,

$$Obs(\Xi, \nabla, \Omega) = Obs(\Xi).$$

Препятствие Маккензи $Obs(\Xi) \in H^3(M; ZL)$ *равно нулю тогда и только тогда, когда существуют такие накрытия* ∇ *и* Ω, *для которых имеет место тождество* $d^{\nabla}(\Omega) = 0$. *Другими словами структура транзитивного предалгеброида Ли реализует транзитивный алгеброид Ли тогда и только тогда, когда препятствие Маккензи* $Obs(\Xi) \in H^3(M; ZL)$ *равно нулю.*

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Рассмотрим точную последовательность алгброидов Ли

$$0 \longrightarrow ZL \longrightarrow L \xrightarrow{ad} \mathcal{D}_{der}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{D}_{out}(L) \longrightarrow 0, \tag{18}$$

связность ∇, ассоциированную с тривиализацией в расслоении L и связность

$$\Xi : TM \longrightarrow \mathcal{D}_{out}(L), \quad \Xi = \theta \circ \nabla,$$

индуцированную гомоморфизмом θ,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & ZL \arrow[r] & L \arrow[r, "ad"] & \mathcal{D}_{der}(L) \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{D}_{out}(L) \arrow[r] & 0. \\ & & & TM \arrow[u, "\nabla"] \arrow[ur, "\Xi"'] & & \end{tikzcd}$$

Тензор кривизны R^{∇} удовлетворяет уловию:

$$\nabla \circ R^{\nabla} = R^{\Xi} = 0$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ZL \arrow[r] & L \arrow[r, "ad"] & \mathrm{Der}(L) \arrow[r, "\theta"] & \mathbf{Out}\ (L) \arrow[r] & 0 \\
 & & & \Lambda^2 TM \arrow[ul, "\Omega"] \arrow[u, "R^{\nabla}"] \arrow[ur, "R^{\Xi}=0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Следовательно в силу точности последовательности получаем:

$$R^{\nabla} = ad \circ \Omega$$

для некоторой формы Ω.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Дифференциал $d^{\nabla}\Omega$ формы Ω включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ZL \arrow[r, "i"] & L \arrow[r, "ad"] & \mathrm{Der}(L) \arrow[r, "\theta"] & \mathbf{Out}\ (L) \arrow[r] & 0 \\
& & \Lambda^3 TM \arrow[ul, "d^{\nabla}\Omega"] \arrow[u, "d^{\nabla}\Omega"'] \arrow[ur, "d^{\nabla^{der}} R^{\nabla}=0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

а значит принимает значение в центре:

$$\Lambda^3 TM \xrightarrow{d^{\nabla}\Omega} ZL.$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Поскольку связность ∇ оставляет подрасслоение ZL инвариантным и индуцирует на подрасслоении ZL связность ∇^Z с тривиальным тензором кривизны,

$$R^{\nabla^Z} \equiv 0,$$

причем

$$d^{\nabla^Z}\left(d^{\nabla}\Omega\right) \equiv 0,$$

то форма $d^{\nabla}\Omega$ является замкнутой формой в пространстве $\Omega^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Класс когомологий $H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$, задаваемой формой $d^{\nabla}\Omega$, обозначается через

$$\mathcal{O}bs(\nabla, \Omega) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$$

и называется препятствием Маккензи для каплинга Ξ. Согласно теореме 7.2.12 из [1] (p. 277) класс когомологий $\mathcal{O}bs(\nabla, \Omega) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$ зависит только от каплинга Ξ и не зависит от выбора связности ∇ и формы Ω, другими словами

$$\mathcal{O}bs(\nabla, \Omega) = \mathcal{O}bs(\Xi).$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Это препятствие тривиально тогда и только тогда, когда пара (∇, Ω) можут быть выбрана такой, что $d^{\nabla}\Omega \equiv 0$, т.е. когда форма Ω задает структуру транзитивного алгеброида Ли для заданного каплинга Ξ.
Так что для классификации транзитивных алгеброидов Ли при заданной присоединенной конечно мерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ нужно проверить только для каких каплингов Ξ класс когомологий $\mathcal{O}bs(\Xi) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$ тривиален. Поэтому возникает естественная проблема вычисления и описании класса когомологий $\mathcal{O}bs(\Xi) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$.

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Заметим, во-первых, что имеется взаимно однозначное соответствие между каплингами Ξ и классами локально тривиальных структур на расслоении L со структурной группой $\mathrm{Aut}(g)^{\delta}$, или, что то же самое, с гомотопическими классами отображений базы M в классифицирующее пространство $B(\mathrm{Aut}(g)^{\delta})$,

$$\{\Xi : TM \longrightarrow \mathcal{D}_{out}(L)\} \Leftrightarrow [M, B(\mathrm{Aut}(g)^{\delta})],$$

$$\Xi = \Xi[f] \text{ for } f : M \longrightarrow B(\mathrm{Aut}(g)^{\delta}).$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Это соответствие естественно порождает предположение, что препятствие Маккензи для каплинга $\mathcal{O}bs(\Xi) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$ является характеристическим классом расслоения L со структурной группой $\mathrm{Aut}(g)^\delta$ со значениями в когомологиях $H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$. Если предположение верно, то препятствие Маккензи для каплинга $\mathcal{O}bs(\Xi)$ может быть вычислено как обратный образ непрерывного отображения $f : M \longrightarrow B(\mathrm{Aut}(g)^\delta)$ некоторого класса когомологий

$$\mathcal{O}bs^\infty \in H^3\left(B(\mathrm{Aut}(g)^\delta); ZL_{B(\mathrm{Aut}(g)^\delta)}; \nabla^Z\right),$$

$$\mathcal{O}bs(\Xi) = \mathcal{O}bs(\Xi[f]) = f^*(\mathcal{O}bs^\infty).$$

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Чтобы доказать, что препятствие Маккензи для каплинга

$$\mathcal{O}bs(\Xi) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$$

является характеристическим классом расслоения L со структурной группой $\mathrm{Aut}(g)^\delta$ со згачениями в когомологиях $H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$ требуется проверить следующее утверждение функториальности:

Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

Theorem

Рассмотрим два многообразия M_1 и M_2 и гладкое отображение $f: M_1 \longrightarrow M_2$. Пусть L_2 - локально тривиальное расслоение со слоем $\mathfrak{g}$ и структурной группой $\mathrm{Aut}(g)^\delta$ на базе M_2. Пусть $L_1 = f^*(L_2)$ обратный образ расслоения L_2. Пусть Ξ_1 и Xi_2 – каплинги для расслоений L_1 и L_2. Тогда

$$\mathcal{O}bs(\Xi_1) = f^*(\mathcal{O}bs(\Xi_2)),$$

где f^* – гомоморизм в когомологиях:

$$f^*: H^3(M_2; ZL_2; \nabla^Z) \longrightarrow H^3(M_1; ZL_1; \nabla^Z).$$

Эта теорема впервые была установлена Li Xiaoyu (неопубликовано).

Вычисление препятствия Маккензи

Если многообразие M односвязно, то любое присоединенное расслоение L с типичным слоем, изоморфным конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, (LAB) может быть описан при помощи классифицирующего пространства группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, $B(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}))$. Тогда препятствие Маккензи для каплинга задается классом когомологий

$$\mathcal{O}bs^{simpl} \in H^3\left(B(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})); Z\mathfrak{g}; \nabla^{\mathfrak{g}}\right),$$

который является прообразом элемента $\mathcal{O}bs^{\infty}$ при отображении

$$B(\varphi) : B(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})) \longrightarrow B(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta}),$$

задаваемым вложением

$$\varphi : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Aut}(g)^{\delta},$$

Вычисление препятствия Маккензи

Заметим, что пространство $B(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}))$ односвязно, следовательно когомологии $H^3\left(B(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})); Z\mathfrak{g}; \nabla^{\mathfrak{g}}\right)$ совпадают с классическими когомологями $H^3\left(B(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})); Z\mathfrak{g}\right)$.
Так что надо взять произвольную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (односвязной) группы Ли G и вычислить группу $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = G/ZG$, где ZG является центром группы G.
Например, если $G = U(n)$ – унитарная группа, то $ZG = U(1)$, $\mathrm{Int}(\mathfrak{u}(n)) = U(n)/U(1) = SU(n)$. Легко проверить, что когомологии пространства $B(SU(n))$ четномерны, т.е.

$$H^3(B(SU(n)); R) = 0.$$

Вычисление препятствия Маккензи

В общем случае алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ является алгеброй $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ всех дериваций алгебры $\mathfrak{g}$. Внутренние дифференцирования $ad\mathfrak{g}$ образуют идеал в алгебре $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, который соответствует нормальной подгруппе $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ группы $\mathrm{Aut}(g)$, которая называется группой внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$.
В случае, когда алгебра $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли некоторой связной группы Ли G, группа $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ изоморфна фактор группе группы G по ее центру,

$$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g} \approx G/ZG,$$

а ее действие на алгебре Ли g задается внутренними автоморфизмами этой же группы G: $h \mapsto g^{-1}hg, \quad h \in G$.

Вычисление препятствия Маккензи

Заметим, что центр ZG есть замкнутая подгруппа в группе G, а значит, фактор группа $G/ZG \approx \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ является группой Ли.
Теперь мы можем применить теорему Хопфа (см., например,). В частности, она утверждает, что алгебра когомологий $H^*(\operatorname{Int}\mathfrak{g}; R)$ изоморфна внешней алгебре над полем вещественных чисел с конечным числом нечетномерных образующих.

Вычисление препятствия Маккензи

Theorem

Пусть G – конечномерная группа Ли. Тогда трехмерный когомологии с вещественными коэффициентами BG, $H^3(BG;R)$ тривиальны,

$$H^3(BG;R) = 0.$$

Вычисление препятствия Маккензи

Теперь можно сформулировать основную теорему

Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko, V.Gasimov *Mackenzie obstruction for the existence of a transitive Lie algebroid,* Russian Journal of Mathematical Physics, t. 21, No.4, p. 544-548, 2014.

Пусть M – односвязное многообразие, L – векторное расслоение со слоем конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и структурной группой $\mathrm{Int}(g) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta}$. Пусть

$$TM \xrightarrow{\Xi} \mathcal{D}_{out}(L) \ , \quad R^{\Xi} = 0,$$

каплинг между TM и L .

Вычисление препятствия Маккензи

Theorem

Для односвязного многообразия M препятствие Маккензи $\mathcal{O}bs(\Xi) \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right)$ к существованию транзитивного алгеброида Ли с заданным каплингом Ξ как класс когомологий тривиален, т.е.

$$\mathcal{O}bs(\Xi) = 0 \in H^3\left(M; ZL; \nabla^Z\right).$$

Finite dimensional version

Расширение

Точная последовательность Атья

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \xrightarrow{a} TM \longrightarrow 0.$$

имеет другую интерпретацию точной последовательности алгебр Ли–Рейнхарта

$$0 \longrightarrow \Gamma^\infty(L) \longrightarrow \Gamma^\infty(E) \xrightarrow{a} \Gamma^\infty(TM) \longrightarrow 0.$$

как расширение одной алгебры Ли $\Gamma^\infty(TM)$ при помощи другой алгебры Ли $\Gamma^\infty(L)$.

Расширение

Благодаря неопубликованной работе

D. Alekseevsky, P. W. Michor, W. Ruppert *Extension of Lie Algebras*, arXiv:math/0005042v3 [math.DG] 26 Feb 2004.

я обратил внимание на работу Хохшильда

Расширение

В работе Хохшильда

Hochschild, G., *Lie Algebra Kernels and Cohomology*, "Amer. J. Math.", 1954, v. 76, No. 3, p. 698-716.

сформулирована задача описания каплингов или, в его терминологии, семейства T –ядер. Напоминаем определение. Дана расщепляемая точная последовательность Атья алгебр Ли

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, "a"] & T \arrow[l, bend right, "\lambda"'] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

которая называется расширением алгебры Ли L при помощи алгебры Ди T .

Расширение

Алгебра Ли T не действует на ядре L расширения, но линейная связность

$$\nabla : T \longrightarrow \mathrm{Der}(L), \nabla_X(u) = [\lambda(X), i(u)],$$

удовлетворяет более слабому условию, которое означает, что ∇ является гомоморфизмом с точностью до присоединенного представления:

$$[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} = \mathbf{ad} \cdot \Omega(X, Y).$$

Расширение

Это означает, что композиция

$$\Xi : T \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Der}(L) \xrightarrow{\sharp} \mathbf{Out}\ (L) = \mathrm{Der}(L)/\,\mathrm{Int}(L)$$

является гомоморфизмом алгебр Ли. Это оправдывает название, что ядро L, которое оснащено дополнительной структурой Ξ, называется T –ядром.
Таким образом, можно сформулировать задачу: Когда T –ядро (L, Ξ) допускает расширение алгебры L при помощи алгебры T , т.е. когда существует точная последовательность алгебр Ли

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} A \xrightarrow{a} T \longrightarrow 0.$$

Расширение

Положительное решение задачи существования расширения для заданного T –ядра (L, Ξ) содержится в вычислении препятствия Маккензи

$$Obs(\Xi) \in H^3(T; ZL).$$

С категорной точки зрения Хохшильд рассмотрел семейство $Coup(ZL, T)$ всех T –ядер (L, Ξ) с фиксированной структурой T –модуля в центре ZL. Препятствие (Маккензи) индуцирует отображение

$$Obs : Coup(ZL, T) \longrightarrow H^3(T; ZL).$$

Расширение

Ключевая идея Хохшильда состояла в том, что образ $\mathbf{Im}\,(Obs) \subset H^3(T; ZL)$ является линейным подпространством. Множество $Coup(ZL, T)$ может быть оснащено структурой линейного пространства, для которой отображение Obs является линейным отображением. Эта конструкция естественно расширяется на категорию векторных расслоений алгебр Ли. Таким образом, тривиальность препятствия Маккензи сводится к описанию образа $\mathbf{Im}\,(Obs) \subset H^3(T; ZL)$.

Благодарности

В заключение
Я приношу благодарность всем моим соавторам и консультантам,
особенно покойному профессору Я.Кубарскому,
а также моим студентам и друзьям

Благодарности всем сотрудникам и консультантам






Спасибо за внимание!

Вычисление препятствия Маккензи

Consider a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$, in which the center $Z\mathfrak{g}$ does not coincide with the algebra $\mathfrak{g}$. Let $rg_0 = \mathfrak{g}/Z\mathfrak{g}$, i.e. is an exact sequence

$$0 \longrightarrow Z\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_0 \longrightarrow 0.$$

It is easy to check that every automorphism $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ leaves the center $Z\mathfrak{g}$ invariant, i.e. induces an automorphism of the quotient algebra $\mathfrak{g}_0$.

Вычисление препятствия Маккензи

Consequently, it turns out natural homomorphism

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0),$$

which takes the subgroup $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ to subgroup $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$. Hence the homomorphism α is well-defined homomorphism

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)^{\delta}.$$

This observation allows to state the theorem:

Вычисление препятствия Маккензи

Theorem

For the bundle LAB with the Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ *as the fiber and the structural group* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)^\delta$ *that can be reduced to the group* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\delta$ *the Mackenzie obstruction of the LAB is trivial.*

Вычисление препятствия Маккензи

There is another case how to analyze the Mackenzie obstruction for given coupling between the Lie algebra bundle L (LAB) and the tangent bundle TM when $g = Zg \oplus g_0$, $Zg_0 = 0$.
If

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \in g$$

then

$$\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ [u_1, u_2] \end{pmatrix} \in g$$

Вычисление препятствия Маккензи

Consider the automorphism group $\mathrm{Aut}(g)$ as a family of matrices

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} : Zg \oplus g_0 \longrightarrow Zg \oplus g_0.$$

The automorphism φ should satisfy the condition:

$$\varphi\left(\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]\right) = \left[\varphi\begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix}\right],$$

Вычисление препятствия Маккензи

that is

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \left(\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right] \right) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right],$$

Вычисление препятствия Маккензи

or

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ [u_1, u_2] \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right],$$

or

$$\begin{pmatrix} \varphi_2^1([u_1, u_2]) \\ \varphi_2^2([u_1, u_2]) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^1(z_1) + \varphi_2^1(u_1) \\ \varphi_1^2(z_1) + \varphi_2^2(u_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1^1(z_2) + \varphi_2^1(u_2) \\ \varphi_1^2(z_2) + \varphi_2^2(u_2) \end{pmatrix} \right],$$

or

$$\begin{pmatrix} \varphi_2^1([u_1, u_2]) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$

Вычисление препятствия Маккензи

Hence if $z_1 = z_2 = 0$, then

$$\begin{pmatrix} \varphi_2^1([u_1, u_2]) \\ \varphi_2^2([u_1, u_2]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [\varphi_2^2(u_1), \varphi_2^2(u_2)] \end{pmatrix},$$

that is $\varphi_2^2 \in \mathrm{Aut}(g_0)$.
If $u_1 = 0$ then

$$[\varphi_1^2(z_1), \varphi_1^2(z_2) + \varphi_2^2(u_2)] = 0,$$

that is

$$\varphi_1^2(z_1) = 0$$

or

$$\varphi_1^2 = 0.$$

Вычисление препятствия Маккензи

Thus for any $\varphi \in \mathrm{Aut}(g)$ one has

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ 0 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} : Zg \oplus g_0 \longrightarrow Zg \oplus g_0,$$

$$\varphi_2^2 \in \mathrm{Aut}(g_0),$$

$$\varphi_2^1|_{[g_0,g_0]} = 0.$$

Hence

$$\mathrm{Aut}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}(Zg) & \mathrm{Hom}(g_0/[g_0,g_0], Zg_0) \\ 0 & \mathrm{Aut}(g_0) \end{pmatrix},$$

where all items are independent each from others

Вычисление препятствия Маккензи

Let us describe $\mathrm{Int}(g) \subset \mathrm{Aut}(g)$. Each element in $\varphi \in \mathrm{Int}(g)$ has the representation

$$\varphi = \exp \mathbf{ad}(\sigma), \sigma \in g,$$

where $\mathbf{ad}(\sigma)(\sigma') = [\sigma, \sigma']$.
Let $\sigma = \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}$. Then

$$\mathbf{ad}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{ad}(u) \end{pmatrix}.$$

Hence

$$\exp \mathbf{ad}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp \mathbf{ad}(u) \end{pmatrix}.$$

Вычисление препятствия Маккензи

So the group $\operatorname{Int}(g)$ consists of the matrices

$$\operatorname{Int}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{Int}(g_0) \end{pmatrix}$$

Hence the quotient group $\operatorname{Aut}(g)/\operatorname{Int}(g)$ is

$$\operatorname{Aut}(g)/\operatorname{Int}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}(Zg) & \operatorname{Hom}(g_0/[g_0, g_0], Zg) \\ 0 & \operatorname{Aut}(g_0)/\operatorname{Int}(g_0) \end{pmatrix}.$$

From the result one can show that in this case the Mackenzie obstruction is trivial.