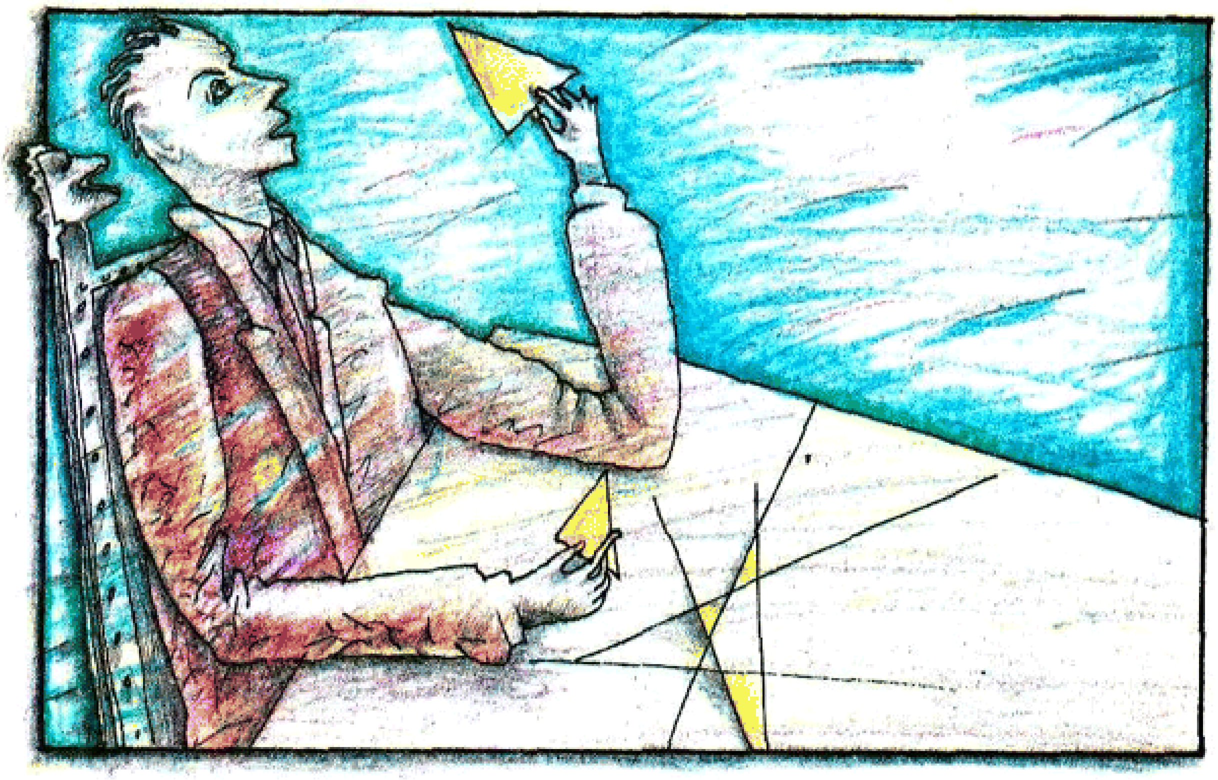
Научно-популярный
физико-математический журнал
"Квант"
(издается с января 1970 года)

Канель А.,Ковальджи А. , **Треугольники и катастрофы.**



Математический кружок

Треугольники и катастрофы

Кандидат физико-математических наук
А. КАНЕЛЬ,
А. КОВАЛЬДЖИ

Во втором номере нашего журнала за этот год по предложению Д. Фомина была опубликована задача М1330:

На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше а) $n/3$; б) $(n-1)/2$; в) $n-2$ треугольников.*

Нас будет интересовать точная оценка числа треугольников. Эта задача, простая и увлекательная по формулировке, была поставлена еще в 1870 году и стала проблемой на сто с лишним лет. Она затягивает, и кажется — решение вот-вот получится. Но почему-то каждая «Эврика!» лишь пополняла нашу коллекцию тонких ошибок.

Первое решение получили в 1979 г. известные геометры Грюнбаум и Шеппард. Здесь мы излагаем более короткое элементарное решение, найденное А. Канелем. По существу его можно выразить тремя предложениями, однако формальный текст мало что даст для понимания. Мы постараемся проследить путь, на котором получено решение, и выявить ключевые идеи, поэтому вначале наши рассуждения будут проводиться на интуитивном уровне.

Ослабленная формулировка

На Московской городской математической олимпиаде в 1972 году была предложена следующая

Задача 1. *На плоскости проведено 3000 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезали на куски. Докажите, что среди кусков найдется не менее а) 1000 треугольников, б) 2000 треугольников.*

Решение. Прежде всего ясно, что $n=3000$. Пункт а) совпадает с пунктом а) задачи М1330, а пункт б) является усилением ее пункта б), поскольку $2000>(3000-1)/2$.

Начнем с ключевой идеи. К каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник (треугольный кусок с основанием на прямой). Если это доказать, то получится решение пункта а), ибо каждый треугольник примыкает к трем прямым, и может оказаться ближайшим для всех трех.

Попробуем найти для каждой прямой примыкающий к ней треугольник, не пересеченный другими прямыми. Здесь красивая идея: выберем ближайшую к этой прямой точку пересечения других прямых (рис. 1). Покажите, что эта точка — вершина искомого треугольника.

Чтобы доказать пункт б), достаточно для каждой прямой найти еще один, примыкающий к ней, треугольник. Это кажется просто: ведь у прямой две стороны. Беда лишь в том, что все точки пересечения могут лежать по одну сторону от прямой... Но... не является ли плохой случай редкостью? Давайте посмотрим, сколько «плохих» прямых может быть.

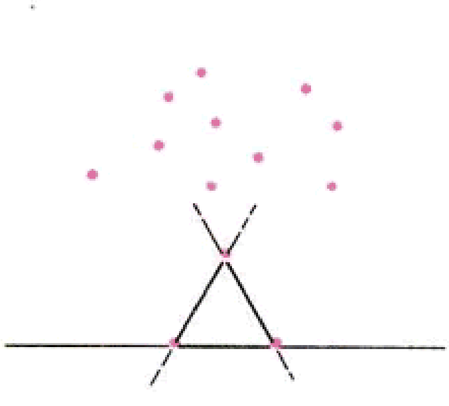


Рис. 1. Ближайшая точка пересечения.

Очевидно, что бывает три плохих прямых. К счастью, это самый плохой случай (когда их всего три). Если же прямых $n>3$, то плохих среди них не больше двух. Докажем это.

Допустим, что есть тройка плохих прямых. Нарисуем только их и еще одну прямую. В любом случае появятся точки пересечения по обе стороны от одной из плохих прямых (поскольку на четвертой прямой есть точка пересечения между двумя другими). Противоречие.

Итак, при $n>3$ найдутся не более двух прямых, к которым примыкает ровно один треугольник, а к остальным примыкает не меньше двух. Оценим число треугольников. Их, конечно, будет по крайней мере $(2n-2)/3$. В нашем случае это $1999\frac{1}{3}$. Но число треугольников целое, значит, их не меньше 2000.

Попутно доказано усиление пункта б) задачи М1330, поскольку $2(n-1)/3>(n-1)/2$.

Предлагаем вам несколько упражнений, идейно близких к только что решенной задаче.

Упражнения

1. В пространстве провели n плоскостей общего положения (любые четыре образуют тетраэдр). Докажите, что среди частей разбиения пространства найдется не меньше а) $n/4$ тетраэдров ($n\geqslant4$), б) $(2n-3)/4$ тетраэдров ($n\geqslant5$).

2 (на идею ближайшей точки). На плоскости отмечено n прямых ($n\geqslant3$). Любые две из них пересекаются, и через каждую точку пересечения проходит не меньше трех прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.

3. В пространстве отмечено n плоскостей. Любые три из них имеют общую точку, и через каждую такую точку проходит не меньше четырех плоскостей. Докажите, что все плоскости проходят через одну точку.

Точная оценка — тонкие ошибки

Теперь приступим к нашей главной задаче:

На плоскости провели n прямых общего положения (любые три образуют треугольник). Докажите, что сре-

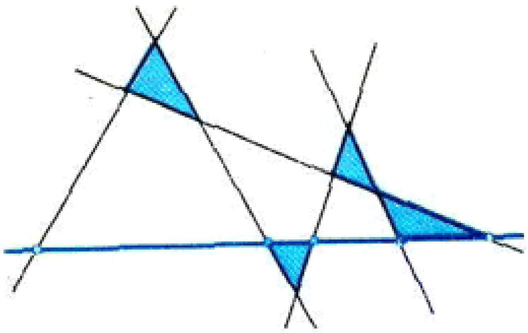


Рис. 2. От каждого треугольника остался треугольник.

ди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника, причем эта оценка точная.

Упражнение 4. Расположите n прямых общего положения так, чтобы треугольных кусков было ровно $n-2$.

В основе всех первоначальных попыток доказательства точной оценки лежало наблюдение, что *треугольник «неуничтожим»*, т. е. секущая прямая делит его на две части, одна из которых — треугольник. (Кстати, верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра и секущей плоскости?)

Вот одно из красивых «решений». Если найти любые $n-2$ треугольника, то, после пересечений, от них останется $n-2$ треугольных кусочка, и задача решена. Для этого выделим одну прямую. Остальные пересекают ее в $n-1$ точке. Эти точки высекают $n-2$ отрезка. Прямые, проходящие через концы отрезков, образуют с ними $n-2$ треугольника (рис. 2). Вот и все!

Упражнение 5*. Найдите ошибку в этом «решении».

Попытка применить индукцию

Поскольку треугольник неуничтожим, естественно попытаться применить индукцию: например доказать, что добавление прямой увеличит число треугольников.

Именно на этом пути получено большинство ошибок. А дело в том, что само утверждение неверно: добавление прямой может не прибавить треугольников!

Упражнение 6. Нарисуйте несколько прямых общего положения так, чтобы при удалении некоторой из них число треугольников не уменьшилось.

Были попытки доказать, что всегда найдется прямая, удаление которой уменьшит число треугольников (тогда бы прошла индукция), но решение было получено из других соображений. При этом остался открытым вопрос: верно ли, что такая прямая найдется?

Итак, добавление и удаление прямых нам не помогло,— поищем другой путь.

Избегать крайностей — тоже крайность

В понятии общего положения заметно стремление уйти от вырожденных случаев. Уже само слово «вырожденный» создает ощущение патологии, чего-то такого, чего не должно быть. И школа приучает к этому, запрещая, например, параллелограмм считать трапецией. Однако именно идея вырождения оказалась краеугольным камнем решения задачи о треугольниках. Начнем с примера.

Задача 2. *В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.*

Решение. Иметь дело с произвольным пятиугольником довольно трудно. А нельзя ли его «упростить»? Но не ради разбора частного случая (хотя и это полезно), а для того, чтобы свести общее решение к частному.

Давайте двигать вершину одного из треугольников параллельно его основанию (рис. 3). Тогда площади треугольника и пятиугольника не будут меняться, но будут меняться площади соседних треугольников.

Ключевая идея: если двигать вершину треугольника вдоль прямой, то его площадь будет либо возрастать, либо убывать, либо не меняться. (Поскольку основание одно и то же, а высота либо растет, либо убывает, либо не меняется). Иными словами:

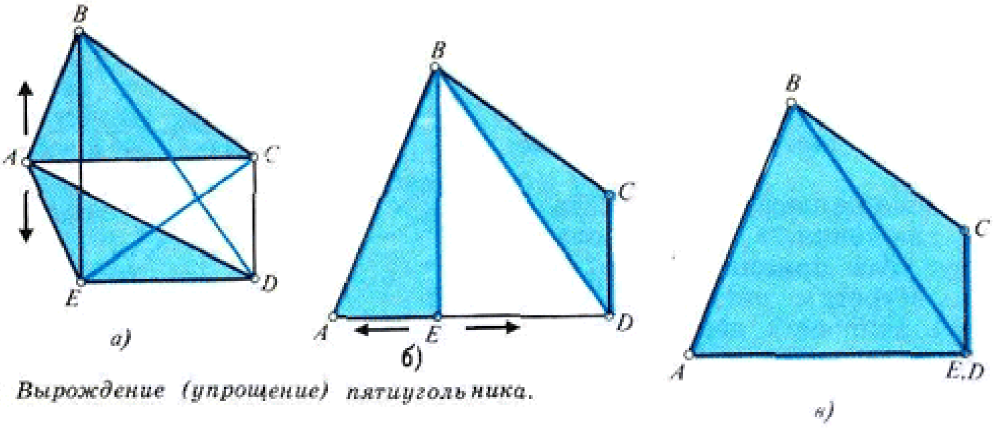


Рис. 3. Вырождение (упрощение) пятиугольника.

если вершина двигается вдоль прямой с постоянной скоростью, то площадь треугольника тоже меняется с постоянной скоростью.

Значит, сумма площадей всех треугольников тоже меняется с постоянной скоростью. Хорошо, если она не растет, потому что мы надеемся доказать неравенство для нового пятиугольника, а тогда для старого оно будет верно и подавно.

Но если площадь треугольников растет, то что делать? Очень просто: надо *двигать вершину в противоположную сторону*, и площадь будет *убывать*.

До каких же пор двигать вершину? Очевидно, пока пятиугольник остается выпуклым. Но в этом предельном положении один из углов пятиугольника равен 180 градусов... Ну и пусть, ведь пятиугольник стал проще! (Стал похож на четырехугольник.)

Теперь повторим это рассуждение для вершины с развернутым углом. Что получится? Она совпадает с одной из соседних вершин.

Можно двигать вершины и дальше, до предела, когда пятиугольник превратится в треугольник (с двумя двойными вершинами или одной тройной), но можно остановиться и раньше, поскольку треугольники EAB и BCD уже покрывают пятиугольник.

Итак, доказательство для исходного пятиугольника свелось к одному частному (вырожденному!) случаю, который очевиден.

Замечание. Можно двигать вершины пятиугольника вдоль произвольной прямой, тогда все площади будут меняться *линейно* (с постоянной скоростью), и нам достаточно следить за тем, чтобы разность площадей треугольников и пятиугольника (которая тоже меняется линейно) убывала.

Такими же средствами решается и ряд других задач.

Упражнения

7. В выпуклом шестиугольнике каждые три соседние вершины образуют треугольник. Всегда ли сумма площадей этих треугольников больше площади шестиугольника?

8. Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что площадь треугольника не превосходит половины площади параллелограмма.

9. Докажите, что у выпуклого многоугольника найдутся три вершины, которые образуют треугольник максимальной площади среди треугольников, вписанных в него.

10. В кубе «сидит» выпуклое тело, чья проекция на любую грань куба полностью ее покрывает. Докажите, что объем тела не меньше трети объема куба.

11. На отрезке отмечено n точек. Какова максимально возможная сумма попарных расстояний между ними?

12. Покажите, что максимум линейной функции от координат точек $f(x, y, z) = ax+by+cz+d$ внутри выпуклого многогранника достигается в одной из его вершин.

13. Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит *200 кг, а полный алмазов* — 40 кг. Пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динариев, а килограмм алмазов — 60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может *унести не более 100 кг?*

Во всех этих задачах хорошо работают три идеи: 1) сведение общей ситуации к частному случаю посредством движения, 2) выбор линейного движения, которое в одном из направлений улучшает ситуацию, 3) рассмотрение граничных (краеугольных) случаев, которые часто бывают вырожденными.

Сама возможность не вникать в процесс движения, а сразу смотреть во главу угла принципиально важна: мы встретим ситуацию, когда варианты движения необозримы, но можно воспользоваться информацией о финальном состоянии.

Поэтому в дальнейшем мы будем: 1) двигать прямые, приводя их расположение к удобному виду, 2) использовать линейное движение, т. е. параллельный перенос с постоянной скоростью, 3) изучать предельные положения прямых.

План действий

Ближайшие рассуждения не войдут в окончательное решение, однако их стоит рассмотреть, поскольку, во-первых, они привели к решению, во-вторых, похожими средствами решаются многие известные задачи и, в-третьих, полезно проследить «чистку» решения. В результате мы получим решение на интуитивном уровне. Затем сделаем рассуждения строгими и, наконец, приведем короткое формальное доказательство.

Где живут треугольники?

Еще, быть может, каждый атом —
Вселенная, где сто планет;
Там все, что здесь, в объеме сжатом,
А также то, чего здесь нет.

В. Брюсов

Из-за обилия случаев расположения прямых все попытки в них разобраться потерпели неудачу. Попробуем двигать прямые. Ради линейности будем двигать их параллельно самим себе. Что может произойти?

Пока прямые не проходят через точки пересечения других прямых, картина в принципе не меняется. Но если несколько точек пересечения совпадут — произойдет «катастрофа»,— исчезнет один или несколько треугольников. После катастрофы произойдет «перестройка», результат которой , непредсказуем (рис. 4).

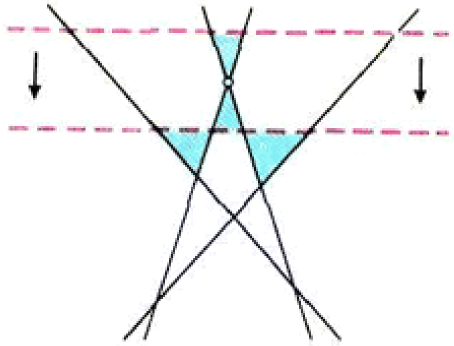


Рис. 4. Гибель и рождение треугольника при движении пунктирной прямой.

Поэтому доводить дело до катастрофы мы не будем, а остановимся за одно мгновение до нее, тогда треугольники не исчезнут и не появятся, а лишь уменьшатся. То, что получится, назовем фокусом прямых. Фокус, таким образом, это несколько прямых, все точки взаимного пересечения которых лежат в малой области, почти точке, причем эта область не пересекается с другими прямыми (рис. 5).

Для нас особенно важно, что в фокусе наблюдается разбиение плоскости в миниатюре, но с меньшим числом прямых. Иначе говоря, фокусы — это обособленные «миры», в которых

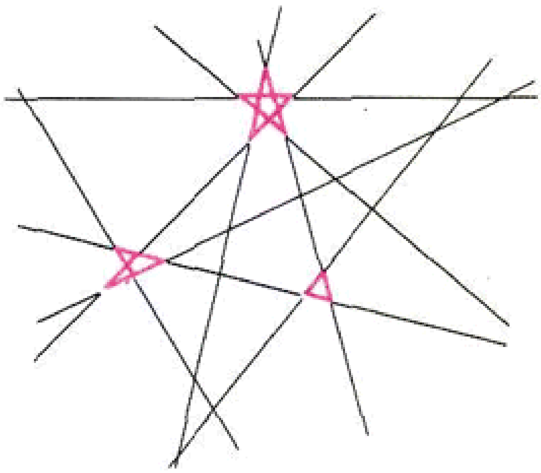


Рис. 5. Фокусы.

живут свои собственные крошечные треугольники. Поэтому, если удастся «развалить» картинку на фокусы, то треугольники станет легче считать (поскольку для меньшего числа прямых задачу можно считать решенной по предположению индукции).

Вернемся к индукции

Итак, предположение индукции состоит в том, что любые k прямых при $k<n$ разбивают плоскость на части, среди которых не меньше, чем $k-2$ треугольника. Значит, в фокусе из $k<n$ прямых найдутся $k-2$ треугольника.

Пусть, к примеру, двигая прямые, нам удалось их все собрать в два фокуса: в один — с 1-й по k-ю, в другой — с k-й по n-ю, причем k-я прямая общая (рис. 6). Тогда в фокусах наберется $(k-2)+(n-k+1-2)=n-3$ треугольника, и для индукционного перехода надо найти еще один треугольник вне фокусов. Это можно сделать (достаточно найти пересеченный треугольник), однако удастся ли нам все прямые собрать ровно в два фокуса? К сожалению, нет. А когда фокусов много, возникает разнообразие случаев. Что делать?

Где границы возможного?

Исследуем процесс образования фокусов. Вначале прямые могут двигаться независимо, но если образовался фокус, то его надо сохранять, т. е. прямые фокуса двигать, как одно целое в виде «ежа» (мы запрещаем прямым фокуса двигаться относительно друг друга для того, чтобы, во-первых, предотвратить катастрофу, а во-вторых, сохранить разбиение плоскости в миниатюре). Фокусы (почти точки) могут дополняться новыми прямыми или объединяться (в одну почти точку), а их сохранение будет все сильнее ограничивать свободу движения и, наконец, все возможности двигать прямые будут исчерпаны.

При этом надо избежать стягивания всей картинки в один фокус (чтобы применить индукцию по числу прямых). Достаточно, например, зафиксировать две точки пересечения (чтобы они не попали в один фокус).

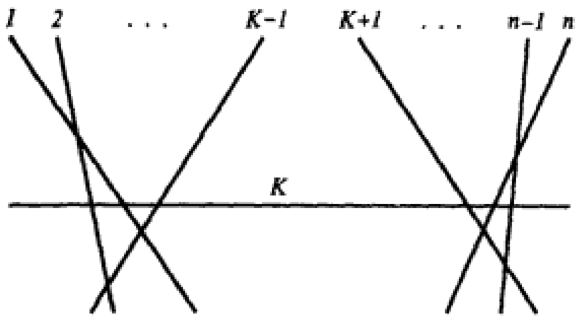


Рис. 6. Два фокуса.

Теперь поймем, как связаны скорости прямых в одном фокусе. Две прямые можно двигать произвольно, а остальные должны под них подстраиваться (рассмотрите случай трех прямых). Иначе говоря, сохранение фокуса из k прямых требует $k-2$ соотношений между их скоростями. Но в этом же фокусе, по нашему предположению, найдутся $k-2$ треугольника,— *столько, сколько соотношений*. Не здесь ли ключ к решению?

Попробуем оценить число треугольников через число соотношений в конечном состоянии (когда прямые потеряют подвижность). Вначале мы закрепили одну прямую и две точки пересечения на ней, т. е., фактически, три прямые. У нас остались $n-3$ свободные прямые. Будем фокусировать их до упора. Для сохранения фокусов потребуется $n-3$ соотношения. По предположению индукции число треугольников в каждом фокусе не меньше числа соотношений, значит всего треугольников не меньше, чем $n-3$.

Заключительный аккорд

Осталось найти еще один треугольник. Всего один, где-то между фокусами. Но как его искать — неясно...

Подумаем: если нам нужен еще один треугольник, то зачем его искать? Нельзя ли сделать так, чтобы он *был с самого начала?* Нам-то ведь все равно, какие три прямые зафиксировать вначале. Давайте *зафиксируем те, которые уже образуют треугольник!* Задача решена!

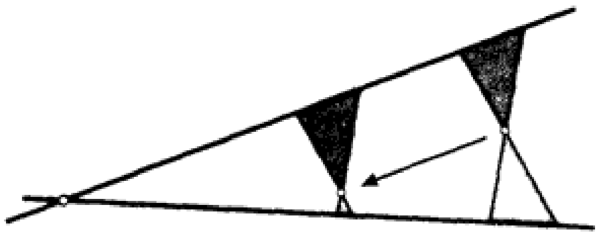


Рис. 7. Сохраняя синий треугольник, можно сжимать красный.

Изготовление решения

Наша работа еще далеко не кончена: чтобы записать решение, надо наши рассуждения очистить, усовершенствовать и сделать строгими. Важно понять связь между треугольниками и фокусами, в частности, почему число треугольников в фокусе не меньше числа соотношений, нужных для его сохранения.

Упражнение 14 (на идею фокуса). Докажите с помощью движения одной прямой, что к ней примыкает треугольник.

Итак, мы решили сначала закрепить один, произвольно выбранный, треугольник — это спасло нас от общего «коллапса» и дало треугольник вне фокусов. А не сохранить ли нам, ради равноправия, *сразу все треугольники?* Тогда при движении прямых фокусы вообще не появятся (поскольку в фокусе существует треугольник, который до этого сжимался, т. е. не сохранялся).

Но если картинка окажется нежесткой, то при некотором движении фокус все же появится. Это будет противоречием. Значит, сохранение всех треугольников гарантирует жесткость картинки, и нам достаточно показать, что, сохраняя меньше, чем $n-2$ треугольника, нельзя добиться жесткости.

Вспомним, как мы сохраняли фокус: разрешали ему двигаться как целому. Простейший фокус — это треугольник. Поступим с обычным треугольником так же: разрешим перемещаться, но сохраним размер. (Проверьте, что полное фиксирование $n/3$ треугольников может привести к потере подвижности прямых.)

Но теперь мы не зафиксировали и начальный треугольник, поэтому, чтобы избавиться от неинтересных параллельных переносов всей картинки, *закрепим две прямые.* (Кстати, положение фокуса тоже определялось двумя прямыми.)

Каждый треугольник, как и простейший фокус, дает одно соотношение для скоростей прямых. Следовательно, сколько мы сохраним треугольников — столько получим соотношений.

Итак, надо выбрать $n-2$ скорости, которые мы назовем параметрами. Если треугольников мало (меньше числа параметров), то сохранение их размеров не обеспечит жесткости (рис. 7).

Но почему, если нет жесткости, можно получить фокус? У нас, как и в задаче про пятиугольник, есть возможность *двигать прямые в обратную сторону,* т. е. менять знаки всех скоростей на противоположные, поэтому можно направить одну из прямых к точке пересечения закрепленных прямых,— и тогда фокус неминуем. (Забавно, что при изготовлении решения индукция исчезла, как исчезают строительные леса при возведении зданий.)

Суммируем...

Сначала мы закрепили две прямые, а остальным разрешили двигаться с постоянными скоростями так, чтобы *размеры всех треугольников сохранялись.* Тогда, если треугольников окажется меньше, чем $n-2$, то скорости прямых можно выбрать ненулевыми (будет доказано). Меняя, если надо, направления всех скоростей, можно создать фокус, где и обнаружится неучтенный треугольник. Противоречие.

Уточним рассуждения

Чтобы получить строгое доказательство, необходимо уточнить наши интуитивные рассуждения, и прежде всего о жесткости. Переведем их на язык алгебры, где скорости — неизвестные, а соотношения — уравнения для них. Подвижность прямых означает, что существует ненулевое решение системы уравнений.

Каждый, кто возился с системами, знает, что, как правило, если число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет конечное множество решений; если уравнений больше, чем неизвестных (переопределенная система), то решений нет; если уравнений меньше, чем неизвестных (недоопределенная система), то решений бесконечно много. Последним соображением мы и воспользовались.

К сожалению, эти соображения верны только «как правило». Например, система

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

решений не имеет, хотя число уравнений в ней меньше числа неизвестных. Однако в частном случае, когда все уравнения линейные и однородные, справедлива следующая

Теорема. *Недоопределенная система m линейных однородных уравнений с n неизвестными $(m<n)$*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Докажите эту теорему по индукции, последовательно избавляясь от неизвестных методом подстановки. (Доказательство можно найти в любом курсе линейной алгебры.)

Переведем разговоры о соотношениях для скоростей прямых на язык линейных уравнений (скорость прямой — это скорость ее удаления от начального положения).

Можно убедиться (выражая координаты или векторы), что точка пересечения двух прямых, движущихся с постоянными скоростями, тоже движется с постоянной скоростью, и стороны треугольника меняются с постоянной скоростью, откуда вывести, что *условие сохранения размера треугольника выражается линейным однородным уравнением для скоростей прямых.*

Докажем последнее утверждение геометрически. При параллельном переносе треугольника образуются три параллелограмма (рис. 8), причем площадь одного из них равна сумме площадей остальных. Площадь параллелограмма есть произведение стороны треугольника на величину сдвига прямой.

Будем считать направление сдвига прямой положительным, если треугольник растет. Тогда условие равенства площадей параллелограммов запишется в виде линейного однородного уравнения

$$a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3=0,$$

где a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника, h_1, h_2, h_3 — сдвиги прямых. Таким же точно уравнением связаны и скорости прямых.

Итак, условие сохранения всех треугольников — это система линейных однородных уравнений. Как видите, линейность принесла плоды.

Упражнение 15. Покажите, что в системе координат (x, y) в момент времени t уравнение прямой, движущейся со скоростью v, можно записать в виде:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = c + vt,$$

где α — угол наклона прямой к оси абсцисс.

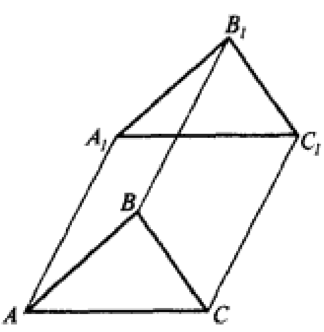


Рис. 8. Три параллелограмма. $S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}=S_{AA_1C_1C}$.

Строгое доказательство

В заключение приведем строгое доказательство, в котором, как это и принято в серьезной литературе, скрыты все повороты мысли. Такие тексты напоминают ребусы или компьютерные программы без комментариев. Их смысл, по выражению академика В. И. Арнольда, подобно притчам, разъясняют лишь ученикам наедине.

Допустим, что число k треугольников разбиения меньше, чем $n-2$. Пусть d — минимальная из сторон треугольников; $v_1, \ldots, v_n$ — скорости прямых в перпендикулярных направлениях, причем $v_1=v_2=0$.

Условие сохранения размеров всех треугольников равносильно системе k линейных однородных уравнений для скоростей v_i $(i=3,\ldots, n)$, которая (согласно теореме) имеет ненулевое решение.

Можно считать (поменяв, если надо, направление времени), что некоторая прямая l_i движется в сторону точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Существует момент («катастрофа»), когда три или больше прямых проходят через одну точку. Пусть t — первый такой момент, тогда в момент

$$t_1=t-d/(2\max v_i)$$

найдутся три прямые, которые образуют непересеченный треугольник со стороной меньше d. Это противоречит сохранению размеров всех треугольников. Утверждение доказано.

Замечания

1. Условие задачи о треугольниках обобщается *для пространств* любого числа измерений, в частности: если в трехмерном пространстве провели n плоскостей общего положения, то среди частей разбиения пространства найдутся не меньше, чем $n-3$ тетраэдра. (Почему треугольников $n-2$, а тетраэдров $n-3$? Что будет в одномерном случае?)

2. Просматривая решение, можно убедиться, что требование общего положения прямых можно ослабить: если среди n прямых на плоскости любые две пересекаются, и *не все прямые проходят через одну точку*, то среди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника.

Главное отличие состоит в том, что в процессе движения могут разрушаться точки многократного пересечения, и тогда возникнут новые треугольники. Но эти треугольники будут расти с постоянной скоростью, и их легко отличить от искомого треугольника, который сжимается в точку.

Проведите соответствующие рассуждения самостоятельно.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 26)

В. Кругляк (Ясиноватая) 39; *А. Кудряшов* (Канаш) 29, 30, 32, 34, 35, 39, 41, 42; *В. Кулагин* (Харьков) 30; *Ю. Кулик* (Канев) 30; *Д. Кюрчев* (Бердянск) 34, 36; *Р. Лазаускас* (Вильнюс) 29, 30, 33, 35; *П. Левин* (Москва) 28—31, 33—36, 38—41; *В. Леонов* (Старый Оскол) 30; *К. Лепесов* (Алма-Ата) 30; *В. Лобас* (Киев) 29—32, 34; *Е. Лонская* (Москва) 32; *Р. Лукша* (Брест) 29, 30, 32; *С. Лысенко* (Старый Оскол) 30, 32; *К. Мазюкевич* (Киев) 30; *С. Макаров* (Усинск) 33, 36; *С. Малашицкая* (Кузнецовск) 34, 35; *В. Манукян* (Ереван) 39, 40; *Д. Марьенко* (Киев) 30; *О. Матысик* (Брест) 32; *М. Махмудов* (Исфара) 30; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 29, 30, 32—34, 36, 37, 39—41; *В. Мушик* (Кузнецовск) 30, 32, 34—36; *А. Мясоед* (Старый Оскол) 29, 30; *А. Наводкин* (Комсомольск) 30; *Т. Назарова* (Желтые Воды) 30, 36, 37, 41; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 29, 30, 33—36, 39—41; *А. Насонов* (с. Кензово Липецкой обл.) 28—33, 36, 37, 42; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 34; *С. Нечаев* (Борисов) 30, 35; *Г. Новичков* (Троицк) 29—31; *С. Носенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 30, 32, 34, 39; *К. Нурматов* (Наманган) 28, 30, 38; *О. Омонов* (Наманган) 30; *С. Осипян* (Ереван) 39, 40; *Р. Остроумов* (Троицк) 29—31; *Х. Отоженов* (Ургенч) 29, 30, 40; *А. Павлик* (Новая Ушица) 29, 30, 32—37, 39—41; *А. Пагнуев* (Ставрополь) 30; *Д. Пастухов* (Витебск) 28—30, 32—34, 36, 38—42; *О. Педоренко* (Винница) 30; *А. Пикалов* (Канаш) 29, 30, 32, 34, 39, 41, 42; *Е. Подгорная* (Винница) 30; *В. Подольский* (Черновцы) 30; *А. Полетов* (Череповец) 30; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 30, 33—35,

(Окончание см. на с. 56)