Периодичность и порядочность *

А. Я. Белов, М. И. Харитонов, С. Г. Григорьев, А. В. Петухов

11 августа 2012 г.

Рассмотрим множество, с элементами которого можно проводить операции сложения, причем

1. для любых элементов a, b, c, $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$;

2. есть специальный элемент 0 такой, что $a + 0 = a$ для всех a;

3. для каждого элемента a существует противоположный $(-a)$ такой, что $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

   Можно также добавить еще одну естественную операцию, умножение, также удовлетворяющую условию *ассоциативности*:

4. $a(bc) = (ab)c$ для всех a, b, c.

   Если при всех этих свойствах умножение и сложение удовлетворяют условию *дистрибутивности:*

5. $a(b+c) = ab+ac, (b+c)a = ba+ca$ для всех a, b, c, то множество с указанными операциями называется кольцом.

Задача 0.1. *Приведите примеры колец с делителями нуля, то есть колец, где есть элементы* a, b *такие, что* $ab = 0$*;*

Решение. Рассмотрим множество пар (a, b) целых чисел. С поэлементной операцией сложения и поэлементной операцией умножения. Очевидно, это кольцо. Единица в этом кольце соответствует паре $(1, 1)$, а ноль — $(0, 0)$. Тогда $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$, т.е. $(1, 0)$ и $(0, 1)$ — делители нуля. □

Определение 0.1. Единицей *кольца или* нейтральным элементом *называется элемент* E *такой, что* $EA = AE = A$ *для всех* $A \in R$. Обратный элемент A^{-1} *определяется равенством* $AA^{-1} = E$.

Задача 0.2. *Докажите, что в кольце с единицей аксиома коммутативности сложения вытекает из других аксиом.*

Решение. Заметим, что

$$ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1) = ab + b + a + 1.$$

*Если Вы заметите ошибки в условиях или решениях задач, пишите по адресу krab8nog@yandex.ru.

Следовательно, $a + b = b + a$. $\square$

Задача 0.3. *Постройте кольцо из 4 элементов, каждый ненулевой элемент которого обратим.*

Пример. Обозначим элементы кольца знаками $0, 1, a, b$. Возможные таблицы сложения и умножения кольца приведены ниже

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

.

Проверка ассоциативности и коммутативности этого сложения и умножения выполняется перебором. Также как и проверка дистрибутивности. $\square$

Задача 0.4. *Постройте некоммутативное кольцо, то есть такое, что существуют a, b такие, что $ab \neq ba$.*

Пример. Кольцо матриц 2×2, вводимое после определения 0.3, является примером некоммутативного кольца. $\square$

Задача 0.5. *Пусть R кольцо, где любая сумма нескольких единиц не равна нулю. Пусть элементы e, f, g таковы, что $ee = e, ff = f, gg = g$ и $e + f + g = 0$. Докажите, что $e = f = g = 0$.*

Доказательство. Построим кольцо, удовлетворяющее условиям задачи, для которого $e, f, g \neq 0$ в два шага.

Первый шаг. Положим, что e, f, g лежат в кольце 2×2 матриц с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $e^2 = e, f^2 = f, g^2 = g, e + f + g = 0$. К сожалению, удвоенная единица этого кольца равна 0.

Рассмотрим алгебру, состоящую из пар (z, M), где z — целое число, а M — 2×2 матрица с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Положим

$$e = (0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f = (0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}), f = (0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Легко видеть, что $e^2 = e, f^2 = f, g^2 = g, e + f + g = 0$. Единица этого кольца (1, $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$), сложенная с собой любое число раз даёт не ноль. $\square$

Определение 0.2. *Многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется* тождеством *кольца A, если он тождественно обращается в ноль на A. Тождество f следует из набора тождеств $\{g_i\}$, если везде, где выполняется набор $\{g_i\}$, также выполняется f. Иногда пишут тождество в виде $f = 0$.*

Задача 0.6. *Существуют ли нетривиальные кольца, удовлетворяющие тождествам $x^2 = 0$; $xy = yx$?*

Пример. Рассмотрим выражения вида (a, b, c), где $a, b \in \mathbb{Z}$, а c — остаток при делении на два (вычет). Определим сложение в этом кольце поточечно, а произведение формулой

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) := (0, 0, a_1 b_2 + a_2 b_1 (\mathrm{mod} 2)).$$

Легко видеть, что указанное кольцо удовлетворяет соотношениям

$$xy = yx \text{ и } x^2 = 0.$$

□

Определение 0.3. *Если каждый ненулевой элемент обратим, то кольцо называется* телом. *Кольцо* коммутативно, *если $ab = ba$ для всех $a, b \in R$. Коммутативное тело есть* поле.

Определение 0.4. *Свободная ассоциативная алгебра или кольцо некоммутативных многочленов над кольцом R: это наборы выражений вида $\sum_i a_i v_i$, $a_i \in R$, v_i – слова. Если $v = \sum_i a_i v_i$, $u = \sum_i b_i v_i$, то $u + v = \sum_i (a_i + b_i) v_i$, $uv = \sum_{i,j} a_i b_j v_i v_j$. Свободная ассоциативная алгебра перестаёт быть свободной, если в ней выполняются некоторые тождества. Понятие тождества алгебры приведено ниже.*

Определение 0.5. *Многочлен $f = f(x_1, \dots, x_n)$ называется* тождеством *алгебры A, если он тождественно обращается в ноль на A. Тождество f следует из набора тождеств $\{g_i\}$, если везде, где выполняется набор $\{g_i\}$, также выполняется f. Иногда пишут тождество в виде $f = 0$.*

Задача 0.7.
1. *Докажите, что в алгебре матриц второго порядка выполняется тождество $[[x, y]^2, z] = 0$ (*тождество Холла*).*
2. *Докажите, что в алгебре матриц второго порядка выполняется тождество $\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(4)} = 0$ (*стандартное тождество *степени 4).*

Доказательство. Доказательство пункта а) распадается в три утверждения, каждое из которых легко доказывается непосредственно.

1. След коммутатора двух матриц равен нулю (след матрицы — это сумма её диагональных элементов);
2. Квадрат матрицы два на два со следом ноль имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;
3. Коммутатор любой матрицы с матрицей указанного выше вида равен 0.

Для матрицы A обозначим её след через $\mathrm{tr}A$. Прямая проверка показывает, что

$$A^2 - A\mathrm{tr}A + \tfrac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2}{2} = 0$$

для всякой матрицы A (мы рекомендуем начать с проверки этого утверждения для матриц вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$). Подставляя вместо A матрицу $[X_1, X_2]$, имеем

$$0 = A^2 - A\mathrm{tr}A + \tfrac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2}{2} = A^2 - \tfrac{\mathrm{tr}(A^2)}{2}.$$

То же тождество будет выполнено, если мы подставим вместо A матрицы $[X_3, X_4]$ и $[X_1, X_2] + [X_3, X_4]$. Откуда следует, что

$$[X_1,X_2][X_3,X_4]+[X_3,X_4][X_1,X_2] = \mathrm{tr}\frac{[X_1,X_2][X_3,X_4]+[X_3,X_4][X_1,X_2]}{2} \qquad (1).$$

Назовём *альтернированием* некоммутативного многочлена $f(x_1,...,x_n)$ от n переменных некоммутативный многочлен

$$\mathrm{Alt}(f)(x_1,...,x_n) := \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}).$$

Тогда $2n$-стандартное тождество запишется как $\mathrm{Alt}(x_1....x_{2n}) = 0$. Применяя операцию Alt к выражению (1) имеем,

$$\mathrm{Alt}(X_1X_2X_3X_4) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \mathrm{Alt}(X_1X_2X_3X_4).$$

Стандартное тождество степени 4 переписывается, как $\mathrm{Alt}(X_1X_2X_3X_4) = 0$. Таким образом, нам достаточно доказать, что $\mathrm{tr}\ \mathrm{Alt}(X_1X_2X_3X_4) = 0$.

Прямая проверка показывает, что для всяких матриц A и B имеется тождество

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Откуда легко видеть, что

$$\begin{array}{l}
\mathrm{tr}(X_1X_2X_3X_4)=\mathrm{tr}(X_4X_1X_2X_3)=\mathrm{tr}(X_3X_4X_1X_2)=\mathrm{tr}(X_2X_3X_4X_1),\\
\mathrm{tr}(X_1X_2X_4X_3)=\mathrm{tr}(X_3X_1X_2X_4)=\mathrm{tr}(X_4X_3X_1X_2)=\mathrm{tr}(X_2X_4X_3X_1),\\
\mathrm{tr}(X_1X_3X_2X_4)=\mathrm{tr}(X_4X_1X_3X_2)=\mathrm{tr}(X_2X_4X_1X_3)=\mathrm{tr}(X_3X_2X_4X_1),\\
\mathrm{tr}(X_1X_3X_4X_2)=\mathrm{tr}(X_2X_1X_3X_4)=\mathrm{tr}(X_4X_2X_1X_3)=\mathrm{tr}(X_3X_4X_2X_1),\\
\mathrm{tr}(X_1X_4X_2X_3)=\mathrm{tr}(X_3X_1X_4X_2)=\mathrm{tr}(X_2X_3X_1X_4)=\mathrm{tr}(X_4X_2X_3X_1),\\
\mathrm{tr}(X_1X_4X_3X_2)=\mathrm{tr}(X_3X_2X_1X_4)=\mathrm{tr}(X_3X_2X_1X_4)=\mathrm{tr}(X_4X_3X_2X_1).
\end{array}$$

И, следовательно, что $\mathrm{Alt}\ \mathrm{tr}(X_1X_2X_3X_4) = 0$. □

Определение 0.6. *Алгебра A называется* ниль-алгеброй, *если есть функция $n: A\to \mathbf{N}$ такая, что для любого $x\in A$ выполняется равенство $x^{n(x)} = 0$. Если же в ней выполняется тождество $x^n = 0$, то A называется* ниль-алгеброй индекса n. *A —* нильпотентна индекса k, *если в ней выполняется тождество $x_1\cdots x_k = 0$, A —* нильпотентна, *если она нильпотентна индекса k при некотором k. τ — элемент алгебры A — называется алгбраичным индекса k, если для некоторых элементов $a_1,a_2,\ldots,a_k$ из алгебры A выполняется равенство $\sum_{i=1}^{k}\tau^i a_i = 0$. Алгебра A* алгебраична индекса k, *если каждый ее элемент алгебраичен индекса k над основным полем, и* алгебраична, *если каждый ее элемент алгебраичен некоторого индекса (зависящего от элемента).*

Задача 0.8. *1. Докажите, что в алгебре, алгебраичной индекса k, выполняется нетривиальное тождество.*

2. Докажите, что алгебра матриц n-го порядка алгебраична индекса n.

3. Докажите равенство (поляризацию)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\right)^n - \sum_{j}(x_1+\cdots+\widehat{x_j}+\cdots+x_n)^n + \sum_{j<k}(x_1+\cdots+\widehat{x_j}+\cdots+\widehat{x_k}+\cdots+x_n)^n + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_i x_i^n = \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

(Если переменные x_i коммутируют, то в результате получится $n!x_1 \cdots x_n$.)

4. *Докажите, что тождество x^n влечет тождество $\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$.*

5. *Докажите, что каждое тождество имеет полилинейное (т.е. линейное по каждой своей переменной) следствие той же степени.*

Задача 0.9. *Пусть в алгебре A выполняется полилинейное тождество степени n. Докажите, что слово, являющееся n-разбиваемым, можно представить в виде линейной комбинации лексикографически меньших слов.*

А. Г. Курош в 1941 году поставил следующий вопрос.

Проблема А.Г.Куроша. *Верно ли, что алгебраическая конечно-порожденная алгебра, в которой выполняется некоторое тождество степени n, конечномерна?*

Первоначальное решение проблемы Куроша, полученное известными математиками Левицким и Капланским десятью годами спустя, было далеко не элементарным, пока А.И.Ширшов не разработал принципиально иной, чисто комбинаторный метод, позволивший решить и проблему Куроша, и вопросы нильпотентности.

Задача 0.10. *Воспользовавшись теоремой Ширшова о высоте, решите проблему Куроша. Докажите также, что l-порожденные ниль-алгебры индекса n нильпотентны индекса $k(n, l)$.*

Наша дальнейшая цель – получение оценок на функцию $k(n, l)$.

Оценки высоты в комбинаторике слов приводят к таким же оценкам в теории колец. Первоначальная оценка А. И. Ширшовабыла очень завышенной, однако его работы содержат глубокие идеи, интересные до сих пор. А.Т.Колотов в 1982 году получил двойную экспоненту (l^{l^n}), где l – число образующих, n – степень тождества. А. Я. Белов в 1990 году получил экспоненциальную оценку порядка $n^3 l^{3n}$, эта оценка улучшалась А.Клейном в 2000.

В 1991 году Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос.

“Пусть $F_{2,m}$ – свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по m?”

Задача 0.11. *Докажите, что заключительная задача цикла “Экспоненциальная оценка” проекта “Периодичность и порядочность” дает положительный ответ на вопрос Зельманова.*

В 2010 году А. Я. Белов и М. И. Харитонов получили субэкспоненциальную оценку.

В этой связи возникает следующая нерешенная задача:

Задача 0.12. *Получить полиномиальную оценку на высоту.*

Более того,

Задача 0.13. *Существует ли верхняя оценка на высоту, полиномиальная относительно степени и линейная относительно числа букв в алфавите?*

И, наконец, возникает

Задача 0.14. *Получить как можно более точную нижнюю оценку на высоту.*

2 Цикл “Комбинаторика”

В некоторых доказательствах присутствует термин “k−хвост”, который означает то же самое, что термин “k−начало”.

Задача 2.1. *Карлсон может писать только те слова, которые не содержат подслов из двух различных букв. Сколько слов длины n может написать Карлсон, если в словаре l букв?*

Ответ. Карлсон может писать слова, состоящие из всех одинаковых букв, а их ровно l. □

Задача 2.2. *В словаре племени Винни–Пухов 20 слов. В фразах их языка возможны любые сочетания этих слов. Существуют два магических заклинания, “Земля стоит на великом крокодиле” и “Каждый вечер крокодил глотает солнце”, которые вызывают ураган, и поэтому вслух можно произносить только такие фразы, в которых эти последовательности слов не встречаются*[1]*. Сколько всего фраз из десяти слов можно произносить вслух?*

Ответ. $20^{10} - 12 \cdot 20^5 + 4$. □

Задача 2.3. *В алфавите смешариков l букв. Может ли в их словаре содержаться слово длины l, у которого ровно*

a) $l + 1$
b) $\frac{l(l-1)}{2} - 1$
c)* $2l$
различных подслов.

Решение. a) Для $l = 1$ такого слова, очевидно, не существует. Для $l = 2$ такое слово существует: ab. Далее мы считаем, что $l \geqslant 3$. Рассмотрим слова, состоящие из одинаковых букв. В них ровно l различных подслов. Если в слове будет хотя бы 2 различные буквы, то там будет как минимум 2 различных подслова длины 1 и хотя бы 2 длины 2 ($l \geqslant 3$). Тогда всего подслов будет не меньше, чем $l+2$, что уже больше, чем нам нужно.

b) Для $l \leq 4$, все очевидно. Для $l = 5$ пример: ababa. Для l = 6: aaaabb. Для 7: aabbabb.

Примеры для всех $l \geq 8$ строятся по индукции: к слову длины $l-3$ приписывается в конец три буквы, отличающиеся от всех предыдущих.

c) Случай $l \leq 4$ (как более простой) мы оставляем читателю. Рассмотрим случай $l \geq 5$. Для того чтобы слово W имело ровно $2l$ различных подслов, требуется чтобы в нём было хотя бы 2 различные буквы. При этом условии, для любого $1 \leq k < l$ различных подслов длины k хотя бы два (иначе все буквы подслова будут одинаковы). Рассмотрим различные подслова длины два . Если их ровно два, то слово имеет вид:

$$ababab...ab, \text{ или } ababab...aba, \text{ или } abbb...b, \text{ или } aaa...ab.$$

В этих словах меньше, чем $2l$ различных подслов и, следовательно, они не удовлетворяют условию задачи. По аналогичным соображениям подслов длины 3 хотя бы

[1] Даже если слова в других словарных формах.

3. В итоге, различных подслов W по крайней мере $2 + 3 + 3 + ... + 2 + 1$ (всего l слагаемых). Указанная сумма равна $2l + 1$ и, следовательно, не существует слова W длины $l \geq 5$, содержащего ровно $2l$ подслов. □

Задача 2.4. *В алфавите индейцев N букв. Из них индейцы составляют слова. Известно, что любое слово, повторенное дважды, означает то же самое, что и само слово, а замена подслова на его квадрат не меняет смысла всего слова. Например,* **горород** *означает то же, что и* **город**. *Докажите, что в языке индейцев конечное число понятий, если:*

a) $N = 2$;

b) $N = 3$;

c) произвольное N.

Доказательство. Сначала введем одно обозначение. Назовем слово *несократимым*, если нет слова короче с таким же смыслом. Доказывать утверждение задачи будем по индукции по N — числу букв в алфавите. База для N равного единице очевидна. Докажем переход от N к $N + 1$. По предположению индукции несократимых слов в алфавите с N буквами конечно. Обозначим за d произвольное число, большее длины каждого из несократимых слов этого алфавита. Теперь рассмотрим алфавит из $N+1$ буквы. Пусть в нём найдется несократимое слово длины хотя бы $(d+1)(N+1)^{d+2}$. Это слово можно разбить на $(N + 1)^{d+2}$ блоков длины $d + 1$ плюс, возможно, ещё что-то. Среди этих блоков найдутся 2 одинаковых, т.к. всего возможных блоков длины $(d+1)$ ровно $(N + 1)^{d+1}$, что меньше $(N + 1)^{d+2}$. Обозначим два одинаковых блока длины $(d + 1)$ за B (они не пересекаются). Если бы в B было не более, чем N различных букв, то по предположению индукции это слово было бы сократимо. Следовательно, в записи B участвуют все буквы нашего алфавита.

Покажем, что если слово B содержит все буквы алфавита, а C — любое слово, то значение BCB совпадает со значением B (если это так, то слово полученное в предыдущем параграфе сократимо и задача 2.4 решена).

Покажем, что существует такое Y, что слова B и BCY имеют одинаковый смысл (если это так, то слова

$$B \leftrightarrow BCY \leftrightarrow BCBCY \leftrightarrow BCB$$

имеют один и тот же смысл и задача 2.4 решена). Пусть $C = c_1c_2...c_k$. Так как c_1 входит в B,

$$B = Sc_1M.$$

Тогда B совпадает по смыслу с Bc_1M. Так как c_2 входит в B, $B = Ec_2D$ и смысл слов B_1M и $Bc_1c_2Dc_1M$ одинаков. И так далее. Таким образом, и Y имеют одинаковый смысл для некоторого Y.

Значит, в алфавите длины $N + 1$ не бывает несократимых слов длины большей, чем $(d + 1)(N + 1)^{d+2}$, а, следовательно, число слов в этом алфавите конечно. □

Задача 2.5. *Назовём* запретом *слово, которое мы запрещаем использовать в качестве подслова. Соответственно слово, не содержащее запретов, называем разрешённым. Какое минимальное число запретов нужно задать, чтобы среди стобуквенных слов ровно два: $(ab)^{50}$ и $(ba)^{50}$ — были разрешены?*

Решение. Рассмотрим все слова длины 100, состоящие из одинаковых букв. Их ровно l и у них нет общих подслов. Значит, нам требуется как минимум l запретов.

Покажем, что l запретов хватает. Действительно, слова без запретов aa, bb, c, d и всех оставшихся букв — это ровно $abab....ab$ и $baba...ba$. □

Запись u^t означает слово u, написанное t раз подряд.

Задача 2.6. *Пусть k, t – некоторые натуральные числа. Докажите, что если в слове V длины $k \cdot t$ не больше k различных подслов длины k, то для некоторого слова v слово V включает в себя подслово вида v^t.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k. База при $k = 1$ очевидна. Обозначим через V^- слово V, с выброшенной последней буквой. Если в V^- находится не больше, чем $(k-1)$ различное подслово длины $(k-1)$, то применяем индукционное предположение (длина V^- не меньше, чем $(k-1)t$).

Пусть V^- содержит не меньше, чем k подслов длины $k-1$. Так как V^- содержит не больше, чем k различных подслов длины k, то в подслове V длины k последняя буква определяется по $(k-1)$ предыдущей. Таким образом, среди первых $k+1$ подслов длины $(k-1)$ есть не меньше двух одинаковых. Пусть они имеют номера i, j и $i > j$ (отметим, что i-ое подслово и j-ое подслово длины k также совпадают). Тогда i-ая буква совпадает с j-ой, $(i+1)$-ая с $(j+1)$-ой, $(i+k)$-ая с $(j+k)$-ой. Так как $(i-j) \leq k$, V есть подслово $V_{1\to(j-1)}V^{\infty}_{j\to(i-1)}$, где $V_{1\to(j-1)}$ — подслово в V, начинающееся в 1-ой букве, а кончающееся в $j-1$, а $V_{j\to(i-1)}$ — подслово V, начинающееся в j-ой букве, а кончающееся в $(i-1)$-ой. Так как $i-1 \leqslant k$ и $i-j \leqslant k$, V содержит не меньше, чем t-ую степень подслова $V_{j\to(i-1)}$. Значит, V содержит подслово вида v^t. □

Задача 2.7. *Установите биекцию между следующими двумя множествами:*

- *последовательности натуральных чисел $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, где $a_i \leqslant i$;*
- *перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей последовательности не больше 2.*

Доказательство. Рассмотрим множество перестановок $S_n^{\vee}$ чисел $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей последовательности не больше 2 (мы рассматриваем перестановки, как подмножество множества слов). Для всякой перестановки $\sigma \in S_n^{\vee}$ обозначим через $b(\sigma)$ длину максимальной возрастающей подпоследовательности, конец которой совпадает с концом σ. Для всякого $m < n$ и для каждой перестановки $\sigma \in S_n^{\vee}$ обозначим через $\sigma[m]$ перестановку, получаемую из $\sigma[m]$ выбрасыванием всех чисел, больших m. Каждая перестановка $\sigma \in S_n^{\vee}$ задаёт последовательность чисел

$$b_1 := b(\sigma[1]), b_2 := b(\sigma[2]), ..., b_n := b(\sigma[n]).$$

Заметим, что $b_1 = 1, b_{i+1} \leqslant b_i + 1, 1 \leqslant b_i \leqslant i$. Зададим теперь последовательность $\{a_i\}$ правилом $a_i := i + 1 - b_i$. Заметим, что

$$a_1 = 1,\ 1 \leqslant a_i \leqslant i,\ a_i \leq a_j.$$

Таким образом, каждой перестановке $\sigma \in S_n^{\vee}$, в которой нет убывающей последовательности длины 3, мы сопоставили возрастающую последовательность $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, для которой $a_i \leq i$.

Легко видеть, что заданное соответствие биективно. Построение обратной функции оставляется читателю в качестве упражнения. □

Решение этой задачи также находится в проекте Доценко "Числа Каталана и естественные отображения" на одной из предыдущих конференций турнира городов.

Задача 2.8. *Сто людоедов приехали на пир. Обедающий людоед проглатывает целиком себе подобного. Пообедавший людоед, конечно, может и сам сослужить обедом для другого своего собрата. Так и составляются пищевые цепочки. Длиной цепочки назовем количество людоедов, вложенных друг в друга. Вопрос: какой максимальной длины цепочка точно присутствует, если известно, что какие бы десять людоедов мы не взяли, среди них найдутся два экземпляра, один из которых покоится в желудке другого?*

Доказательство. Рассмотрим всех этих людоедов в виде графа: сами людоеды - это вершины графа, а ориентированные ребра идут от пообедавшего людоеда ко всем его жертвам. Заметим, что этот граф является лесом (т.е. объединением деревьев). Подвесим граф за людоедов, которых не съели. По очевидным соображениям на произвольном уровне число вершин не более девяти, а из этого ясно, что есть цепочка длины хотя бы 12. А теперь покажем, что может быть ровно 12: для начала посадим 99 людоедов в 9 комнат по 11 людоедов в каждой, и пусть они пообедают таким образом: второй съедает первого, потом третий второго и так далее. А потом оставшийся людоед съест всех выживших в комнатах. Ура. □

Определение 2.1. *Слово u назовем* нециклическим, *если u нельзя представить в виде v^k, где $k > 1$.*

Задача 2.9. *Пусть u и v – различные нециклические слова длины m и n соответственно. Слово W содержит подслова $u' = u^{m \cdot n}$ и $v' = v^{m \cdot n}$. Докажите, что длина общей части у u' и v' не больше $m + n - 2$.*

Решение. Пусть $m > n$ и пусть пересечение двух периодических подслов u^{mn} и v^{mn} имеет длину хотя бы $m + n - 1$. Обозначим их пересечение за S, а его буквы — $s_1, ..., s_l$ (l — длина S). Покажем, что в этом случае слово u — периодично с периодом $d :=$НОД(m, n).

Достаточно показать, что если $k = l (\mathrm{mod\ d})$ и $1 \leq k, l < m + n - 1$, то $s_k = s_l$.

Обозначим как r остаток при делении k на d. Пусть $r \neq 0$. Тогда $k - r = an - bm$ для каких-то чисел $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Построим последовательности k_i, a_i, b_i по следующим правилам:

1. $k_0 = k, a_0 = a, b_0 = b$;

2. $$\begin{cases} k_{i+1} = k_i + n, a_{i+1} = a_i - 1, b_{i+1} = b_i, & \text{если } a_i > 0 \text{ и } k_i < m \\ k_{i+1} = k_i - m, a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = b_i - 1, & \text{если } a_i = 0 \text{ и } b_i > 0 \\ i-\text{ый член последовательности — последний}, & \text{если } a_i = b_i = 0 \end{cases}.$$

Из определения этой последовательности видно, что

1. $k_i - r = a_i n - b_i m$ для всех $i \geq 0$;

2. $d \not| k_i$ для всех $i \geq 0$;

3. $1 \leq k_i \leq m + n - 1$ для всех $i \geq 0$.

4. Если k_i — последний член последовательности, то $k_i = r$.

Из этих правил следует, что $s_{k_{i+1}} = s_{k_i}$ и, в частности, $s_k = s_l$, если $k = l (\mathrm{mod}\ d)$.

Пусть $r = 0$. Покажем, что $s_k = s_n = s_m$. Для этого построим последовательности k_i, a_i, b_i, заданные следующими правилами:

1. $k_0 = n$, $a_0 = m/d - 1, b_0 = n/d - 1$;

2. $\begin{cases} k_{i+1} = k_i + n, a_{i+1} = a_i - 1, b_{i+1} = b_i, & \text{если } a_i > 0 \text{ и } k_i < m \\ k_{i+1} = k_i - m, a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = b_i - 1, & \text{если } a_i = 0 \text{ и } b_i > 0 \\ i - \text{ый член последовательности — последний}, & \text{если } a_i = b_i = 0 \end{cases}.$

Отметим, что

1. $k_i - n = a_i n - b_i m$ для всех $i \geqslant 0$;

2. $k_i \;\vdots\; d$ для всех $i \geqslant 0$;

3. $1 \leq k_i \leq m + n - 1$ для всех $i \geqslant 0$.

Пусть $k_i = n$. Тогда $na_i = mb_i$ и, в частности, или $a_i = 0$, или $a_i \geq m/d$. Так как последнее невозможно, то $a_i = b_i = 0$. Наоборот, если $a_i = b_i = 0$, то $k_i = n$. Таким образом, в последовательностях $\{a_i\}, \{b_i\}, \{k_i\}$ ровно $m/d + n/d - 1$ член. Покажем теперь, что любые два члена последовательности $\{k_i\}$ различны. Действительно, если $k_i = k_j$, то $n(a_i - a_j) = m(b_i - b_j)$. В частности $a_i \geq m/d$. Что невозможно. Таким образом, любые два члена последовательности $\{k_i\}$ попарно различны, принадлежат множеству $\{d, ..., d(m/d + n/d - 1)\}$, а всего элементов в этой последовательности — $m/d + n/d - 1$. Откуда следует, что члены этой последовательности исчерпывают все числа, делящиеся на d, от d до $d(m/d + n/d - 1)$, и, так как $s_{k_i} = s_{k_{i+1}}$, $s_k = s_n = s_m$.

В частности, отсюда следует, что если $k, l \;\vdots\; d$ и $k = l \pmod d$, то $s_k = s_l$. Так как пересечение двух периодических множеств имеет длину $m+n-1$ и d-периодично, то каждое из слов u, v (они имеют длину меньшую $m+n-1$!) периодично. Противоречие. Следовательно, пересечение u^{mn} и v^{mn} не может иметь длину, большую $m+n-2$. □

Задача 2.10. *На бесконечной ленте в каждой ячейке написаны цифры от 1 до 9. Докажите, что тогда либо из неё можно вырезать 10 непересекающихся тысячезначных чисел в порядке убывания, либо какое-то число длины меньше 10 повторится 50 раз подряд.*

Доказательство. Рассмотрим момент, с которого все встречаемые 1000-значные числа повторяются бесконечное число раз. Если их хотя бы 10, то найдем наибольшее, затем далее него найдем второй по величине и так далее. А если их менее 10, то тогда существует 2 одинаковых 1000-значных слова, у которых расстояние между началами менее 10. Значит, такое число (частично) периодично с периодом не более 10. А, значит, мы нашли требуемое 50-ти разовое повторение слова длины менее 10. □

3 Цикл "Теорема Дилуорса"

Задача 3.1. *Из любых ли пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

Доказательство. Является частным случаем задачи 3.4. □

Задача 3.2. *Из любых ли девяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

Решение. Нет, не из любых. Например, 3-2-1-6-5-4-9-8-7. □

Задача 3.3. *Докажите, что из любых десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания.*

Доказательство. Является частным случаем задачи 3.4. □

Задача 3.4. *Докажите, что среди любых $mn+1$ различных чисел найдутся либо $m+1$ в порядке убывания, либо $n+1$ в порядке возрастания.*

Доказательство. Положим, что $a \succ b$, если $a > b$ и a стоит после b. А все остальные пары назовем несравнимыми. Из задачи 3.7 мы можем найти либо $m+1$ цепь относительно $\succ$ (что соответствует $m+1$ элементу в порядке возрастания), либо $n+1$ попарно несравнимый элемент относительно $\succ$, что соответствует убывающей последовательности из $n+1$ элемента. □

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) M — это множество, для любых двух элементов a, b которого известно, находятся они в некотором отношении $\prec$ или нет. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

Х если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$;

Х если $a \prec b$, то a не равно b.

Задача 3.5. *Возможно ли, что неравенства $a \prec b$ и $b \prec a$ выполнены одновременно?*

Задача 3.6. *Докажите, что слова образуют ЧУМ при отношении, порождённом лексикографическим порядком.*

Определение 3.1. *Множество, любые два элемента которого сравнимы, называют линейно упорядоченным или, коротко, цепью.*

Задача 3.7. *Пусть m, n – некоторые натуральные числа. В частично упорядоченном множестве из $mn+1$ элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания $m+1$ элементов, либо $n+1$ попарно несравнимых элементов (так называемая антицепь).*

Доказательство. Будем доказывать по индукции по числу m. База для $m = 0$ очевидна. Докажем переход. Рассмотрим наш ЧУМ. Назовем число максимальным, если нет никакого, большего его. Рассмотрим все максимальные числа. Из определения видно, что никакие 2 максимальных не являются сравнимыми. Если их хотя бы $n+1$, то мы нашли требуемую антицепь. Если из не более, чем n, то забудем временно про них и найдем среди оставшихся (которых не меньше, чем $n(m-1)+1$ либо антицепь длины $n+1$ (уже победа), либо цепь длины m. Во втором случае рассмотрим максимальный элемент этой цепи. Раз он не забыт, то есть забытое число, большее данного, а, соответственно, и всех элементов цепи. Добавим забытое число, и, тем самым, построим требуемую цепь длины $m+1$. □

Задача 3.8. *Обозначим через d наибольшее количество элементов цепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на d антицепей.*

Решение. (Все новые определения есть в решении задачи 3.7) Рассмотрим все максимальные элементы и объединим их в одну антицепь. Забудем про них. Заметим, что не осталось цепей длины n, так как иначе вместе с забытыми мы можем найти цепь длины $n+1$. И будем действовать таким образом и дальше. Ура. □

Более того, верен следующий факт, который окажет нам серьёзную помощь в дальнейшем:

Теорема Дилуорса. Обозначим через n наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на n цепей.

Доказательства теоремы Дилуорса и других задач из посвящённого ей цикла можно прочитать в [17].

4 Цикл "Экспоненциальная оценка"

Пусть наш алфавит состоит из букв $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Будем считать, что

$$a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_l.$$

Таким образом, мы упорядочили буквы алфавита. Рассмотрим теперь два слова u и v. Если одно из них является началом другого, то назовём слова u и v *несравнимыми* (по отношению друг к другу). В противном случае найдутся слова w, u', v' такие, что $u = wu'$, $v = wv'$, причём первые буквы у слов u' и v' – различные (w может быть пустым, u' и v' – нет). Если первая буква u' больше первой буквы v', то считаем слово u больше слова v, в обратном случае считаем u меньше v. Таким образом, мы частично упорядочили слова. Приведённый порядок называется *лексикографическим* (мы уже обсуждали его в предисловии). Не стоит также забывать, что некоторые слова так и остались несравнимыми.

Решения большинства задач этого параграфа можно найти в статье [15].

Задача 4.1. *Пусть алфавит состоит из трёх букв: a, b и c. Введём на них порядок $a < b < c$. Составьте из приведённого ниже списка слов наиболее длинную возрастающую последовательность. Какие пары слов являются несравнимыми?*

$$cb, abc, bac, abb, b, ccc, abc.$$

Решение. Наибольшая возрастающая подпоследовательность: abb, abc, b, cb, ccc.

Пары несравнимых слов: $b \leftrightarrow bac, abc \leftrightarrow abc$. □

Для дальнейшей работы нам потребуется ввести несколько вспомогательных определений.

Определение 4.1. *Слово W – n-*разбиваемо*, если найдутся слова $u_1, u_2, \ldots, u_n$ такие, что $W = v \cdot u_1 \cdots u_n$, при этом $u_1 \succ \ldots \succ u_n$.*

Определение 4.2. *Слово называется k-*порядочным*, если оно k-разбиваемо, но не $(k+1)$-разбиваемо.*

Задача 4.2. *Найдите число*

a) 1-порядочных слов длины s с попарно различными буквами;

b) 2-порядочных слов, в которых используется ровно l букв.

c) 1-порядочных слов длины s, буквы которых необязательно различны (считать, что в алфавите — l букв).

Решение. a) Ответ: C_s^l.

b) Ответ: $\frac{1}{l+1}\mathrm{C}_{2l}^l$.

Из задачи 2.7 следует, что искомое число слов равно числу последовательностей натуральных чисел $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_l$, для которых $a_i \leqslant i$. Такие последовательности будем называть *корректными.* Пусть c_n — число корректных последовательностей из n элементов. Для корректной последовательности $\{a_i\}$ положим

$$\mathrm{stup}(a_1, a_2 \ldots, a_{n+1}) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \{a_i = i\}.$$

Очевидно, что $1 \leqslant \mathrm{stup}(\{a_i\}) \leqslant n$. Тогда корректные последовательности, заданные для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n+1$ условием $\mathrm{stup}(a_1, a_2 \ldots, a_{n+1}) = j$, можно задать также следующим набором условий:

$$a_i \leqslant i \text{ для } i < j; \quad a_j = j; \quad a_i \leqslant i - 1 \text{ для } i > j.$$

Таким образом, число корректных последовательностей, для которых

$$\mathrm{stup}(a_1, a_2 \ldots, a_{n+1}) = j,$$

равно $c_{j-1}c_{n+1-j}$. Так как j может принимать все натуральные значения в диапазоне $1 \leqslant j \leqslant n+1$, а других значений принимать не может, то получаем, что

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0. \quad (1)$$

Покажем теперь, что $c_n = \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{2n}^n$. Для этого введём функцию

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots.$$

Тогда из соотношения (1) следует, что $f(x) = c_0 + xf^2(x)$. Откуда

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c_0x}}{2x} = \text{[2]}\,\frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Так как $f(x)$ не имеет полюса в 0,

$$f(x) = \tfrac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x} = \sum_{n \geq 0} \tfrac{1}{2}(-1)^{n+2}4^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{\frac{1}{2}}x^n = \sum_{n \geq 0} 4^{n+1}\tfrac{(2n-1)!!}{2^{n+2}}\text{[3]}\,x^n = \sum_{n \geq 0} \tfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{2n}^n x^n.$$

Откуда $c_l = \frac{1}{l+1}\mathrm{C}_{2l}^l$.

c) В 1-порядочном слове буквы идут по возрастанию. Следовательно, 1-порядочные слова находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными наборами неотрицательных целых чисел $(k_1, \ldots, k_l)$, для которых $k_1 + \ldots + k_l = s$. Как известно, число таких наборов равно C_{s+l-1}^s. □

Задача 4.3. *a) Пусть n – некоторое натуральное число, u – нециклическое слово длины не меньше n. Докажите, что слово u^{2n} является n-разбиваемым.*

b) Пусть u — некоторое слово длины $(n-1)$. Докажите, что слово u^{2n} — не n-разбиваемое.

[2] То, что c_0=1 проверяется непосредственно.

Доказательство. а) Из слова u длины $m \geqslant n$ с помощью циклических перестановок можно получить m слов: $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$. Так как слово u — нециклическое, то все слова u_i попарно различны. Предположим, что в лексикографическом смысле $u_{i_0} > u_{i_1} > \ldots > u_{i_{m-1}}$. Представим каждое слово u_i в виде $u_i = v_i w_i$, где $u = w_i v_i$. Рассмотрим теперь слово

$$u^{2n} = w_{i_0} v_{i_0} w_{i_0} v_{i_0} w_{i_1} v_{i_1} w_{i_1} v_{i_1} \ldots w_{i_{m-1}} v_{i_{m-1}} w_{i_{m-1}} v_{i_{m-1}}.$$

Положим $u'_{i_k} = v_{i_k} w_{i_k} v_{i_k} w_{i_{k+1}}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-2$;

$u'_{i_{n-1}} = v_{i_{n-1}} w_{i_{n-1}} v_{i_{n-1}}$; $\gamma = w_{i_0}$.

Тогда слово u^{2n} представится в виде $u^{2n} = \gamma u'_{i_0} u'_{i_1} \ldots u'_{i_{n-1}}$. Так как

$$u'_{i_0} > u'_{i_1} > \ldots > u'_{i_{n-1}},$$

получаем, что слово u^{2n} является n-разбиваемым (см. также [18]).

b) Пусть $u = u_1 \ldots u_s$, где $s \leq n-1$. Пусть u^{2n} — n-разбиваемое слово, то есть содержит непересекающиеся подслова $v_1, \ldots, v_n$, идущие в порядке убывания. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — номера, считая с начала слова u^{2n}, первых букв $v_1, \ldots, v_n$. В силу того что $s < n$, существуют $1 \leqslant i, j \leqslant n$, для которых $r_i = r_j (\mathrm{mod}\ s)$. Тогда либо v_i подслово v_j, либо v_j подслово v_i. В любом случае, v_i и v_j несравнимы либо равны, что противоречит n-разбиваемости u^{2n}. □

Определение 4.3. *а) Слово v —* хвост *слова u, если найдется слово w такое, что $u = wv$.*

б) Если в слове v содержится подслово вида u^t, то будем говорить, что в слове v содержится период цикличности t.

Задача 4.4. *Пусть x, d — некоторые натуральные числа. Докажите, что в слове W длины x либо первые $[x/d]$ хвостов попарно сравнимы, либо в слове W найдется период длины d.*

Решение. Пусть в слове W не нашлось слова вида u^d. Рассмотрим первые $[x/d]$ хвостов. Предположим, что среди них нашлись 2 несравнимых хвоста v_1 и v_2. Пусть $v_1 = u \cdot v_2$. Тогда $v_2 = u \cdot v_3$ для некоторого v_3. Тогда $v_1 = u^2 \cdot v_3$. Применяя такие рассуждения, получим, что $v_1 = u^d \cdot v_{d+1}$, так как $|u| < x/d$, $|v_2| \geqslant (d-1)x/d$. Противоречие. Доказательство также написано в работе [15, лемма 2.1]. □

Здесь и далее: если в формулировке задачи встречаются числа n и d, то считаем, что $n \leqslant d$.

Определение 4.4. *Слово W —* (n, d)-сократимое*, если оно либо n-разбиваемо, либо найдется u^d — подслово слова W.*

Задача 4.5. *Докажите, что если в слове W найдутся n одинаковых непересекающихся подслов длины n, то W — n-разбиваемое.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим хвосты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ слова u, которые начинаются с каждой из его первых n букв. Перенумеруем хвосты так, чтобы выполнялись неравенства: $u_1 \succ \ldots \succ u_n$. Из леммы 1 они несравнимы. Рассмотрим подслово u_1, лежащее в самом левом экземпляре слова u, подслово u_2 – во втором слева,$\ldots, u_n$ – в n-ом слева. Получили n-разбиение слова W. Противоречие (см. также [15, лемма 2.3]). □

Определение 4.5. *Слово W будем называть n-разбиваемым в хвостовом смысле, если найдутся хвосты $u_1, \ldots, u_n$ такие, что $u_1 \succ u_2 \succ \ldots \succ u_n$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ начало u_i слева от начала u_{i+1}.*

Обозначим через $|W|$ длину слова W.

Задача 4.6. *Докажите, что если слово W является*

a) n^3d-разбиваемым в хвостовом смысле,

b) $3n^2d$-разбиваемым в хвостовом смысле,

*c)** $4nd$-разбиваемым в хвостовом смысле,*

то оно — либо n-разбиваемо, либо W содержит подслово в степени d.

Решение. Мы докажем пункт б) пункт а) из него очевидно следует.

Предположим противное. Рассмотрим порядковые номера позиций букв a_i, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{3n^2d}$, с которых начинаются хвосты u_i, разбивающие W. Пусть

$$X_k = \{nd - \text{хвосты } u_i \mid i = 3knd + 1, \ldots, 3knd + 2nd\}.$$

Тогда для произвольных различных чисел i и j если $u \in \chi_i, v \in X_j$, то u и v не пересекаются. В этом случае найдется k такое, что любые непересекающиеся слова u, v из X_k несравнимы. Без ограничения общности можно считать, что $k = 1$. Пусть подслово v_i есть $n \cdot d$-хвост u_i. Подслова v_1 и v_{nd+c} не пересекаются для любого $c \in [1, nd]$. Значит $v_{nd+s} = v_{nd+t}$ для любых $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant nd$, а так как $a_{nd+t} - a_{nd+s} > n$, то подслова

$$u_1, u_{nd+1}, u_{nd+d+1}, u_{nd+2d+1}, \ldots, u_{2nd-d+1}$$

не пересекаются. Следовательно, они несравнимы, а, значит, слово W является n-сократимым. Противоречие. □

Задача 4.7. *Для каждой пары натуральных чисел n, d приведите пример не $(nd-1)$-разбиваемого в хвостовом смысле слова W такого, что W — не $(n+1)$-разбиваемо и не содержит подслова в степени d.*

Решение. Пример, построенный командами "Харьков" и "Девушки":

Пусть в алфавите 2 буквы $a < b$. Искомое слово W равно

$$W = (a^{n-1}b)^{d-1}a^{n-1}.$$

□

Задача 4.8. *Попробуйте улучшить оценку в задаче 4.6.*

Комментарий. Если такая оценка есть, то она больше $(n-1)(d-1)$, так как для алфавита с буквами $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_{n-1} \prec \ldots \prec a_s$ слово $a_1^{d-1}a_2^{d-1}\ldots a_{n-1}^{d-1}$ является $(n-1)(d-1)$-разбиваемым в хвостовом смысле, но не n-разбиваемо в обычном смысле и не содержит периода в степени d. □

Фиксируем алфавит из l букв, слово W длины $r(W)$ над этим алфавитом и натуральные числа $n \leqslant d$. Далее будем считать, что W не содержит подслова в степени d и слово W не $4nd$-разбиваемо в хвостовом смысле. Рассмотрим его первые $[r(W)/d]$ хвостов (далее будем обозначать это множество хвостов за Ω). Тогда по теореме Дилуорса их можно раскрасить в $(4nd-1)$ цветов так, чтобы хвосты одного цвета шли в порядке возрастания. Для решения следующих задач следует пользоваться предыдущими задачами из цикла.

Задача 4.9. *Докажите, что среди любых $4nd^2$ хвостов из Ω найдутся два одноцветных хвоста, у которых отличаются начальные подслова длины $4nd$.*

Решение. Доказательство написано в работе [15, начало §3]. □

Задача 4.10. [4] *В бесконечном парламенте у каждого не более 3 врагов. Доказать, что его можно разбить на 2 палаты так, что у каждого будет не более одного врага в своей палате.*

Доказательство. Будем говорить, что два парламентёра (далее, для краткости, п.) A и B *связаны далёкой враждой*, если существует цепочка п. $A_0, ..., A_n$, для которых $A_0 = A$, $A_n = B$ и B_{i+1} враждует с B_i для всякого $i < n$. Очевидно, что это отношение симметрично и транзитивно. Также очевидно, что число п., связанных с данным п. далёкой враждой счётно. Таким образом, весь парламент распадается на группы такие, что члены разных групп не враждуют между собой и что число членов в разных группах счётно. Понятно [5], что достаточно доказать, что каждую такую группу можно разбить на две палаты так, чтобы у каждого её члена был не более, чем один враг.

Далее мы считаем, что число п. счётно. Занумеруем их натуральными числами. Будем обозначать через P_n множество из п. с номерами 1,..., n. Разбиение на палаты мы будем понимать как множество функций $f : P_n \to \{1, 2\}$ (для каждого п. мы указываем относится он к первой палате или второй). Множество разбиений на палаты, в котором у каждого п. из P_n неболее одного врага в своей палате обозначим H_n (назовём такие разбиения *допустимыми*). Очевидно, что ограничение допустимого разбиения с множества п. P_n на множество п. P_m $(m < n)$ — допустимо. Мы будем обозначать множество ограничений H_n на H_m как $(H_n)|_m$.

Покажем, что для каждого n множество H_n не пусто. Разместим как-нибудь всех п. в две палаты. Далее, если какой-то п. имеет двух врагов в своей палате, то мы его перемещаем в другую палату. При этом число пар врагов в сумме внутри обеих палатах падает. Так как всего число пар врагов конечно, то после какого-то числа операций у каждого парламентёра будет не более одного врага в своей палате. Т.е. мы показали, что для всякого n множество H_n непусто.

Заметим теперь, что если $m > n > k$, то $((H_m)|_n)|_k = (H_m)_k$, в частности, $(H_m)|_k \subset (H_m)|_n$. Для всякого n положим

$$(H_\infty)_n := \cap_{m \geq n}((H_m)|_n).$$

Покажем, что для всякого $n \geq 1$ множество $(H_\infty)_n$ непусто. Напомним, что если $m_1 > m_2 > n$, то $(H_{m_1})|_n \subset (H_{m_2})_n$. Таким образом, если $(H_\infty)_n = 0$, то $(H_m)|_n = 0$ для какого-то $m > n$. Что невозможно.

Заметим также, что если $m > n$, то

$$(H_\infty)_n = ((H_\infty)_m)|_n. \quad (2)$$

Теперь построим цепочку $\{f_i\}(f_i \in (H_\infty)_i)$ по следующему правилу: $f_{i+1}|_{P_i} = f_i$ (такая функция f_{i+1} обязательно существует для каждой функции f_i, так как $((H_\infty)_{i+1})|_i = (H_\infty)_i$). Эта цепочка задаёт разбиение всех п. на два парламента: i-ый п. находится в $f_i(i)$ палате. □

[4]Эта задача имеет малое отношение к теме проекта. Она достаточно интересна сама по себе и вызвала оживление среди членов жюри.

[5]здесь мы пользуемся аксиомой выбора

Теперь перестанем фиксировать числа l, n, d и слово W. Будем считать, что l, n, d — некоторые натуральные числа такие, что $n \leqslant d$, а слово W — некоторое слово над алфавитом из l букв.

Задача 4.11 (Лемма Ширшова). *Докажите, что существует функция от натуральных аргументов $f(l, n, d)$ такая, что для любого слова W над алфавитом длины l, не являющегося (n, d)-сократимым, $r(W) < f(l, n, d)$.*

Доказательство. Доказательство леммы Ширшова следует из задачи 5.5. Оригинальное доказательство Ширшова содержится в работе [18]. □

Задача 4.12. *Докажите,что $f(l, n, d) < l(4nd)^{4nd+2}$.*

Доказательство. Доказательство леммы Ширшова следует из задачи 5.5.

□

5 Улучшение экспоненциальной оценки

Решения задач 5.1 — 5.5 находится в параграфе 3 работы [15], 5.6 решена в параграфах 4 и 5 той же статьи.

Список литературы

[1] М. И. Харитонов *Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте*, Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. №6(2012).

[2] Abraham A. Klein. *Indices of nilpotency in a PI-ring.* Archiv der Mathematik, 1985, vol 44:4.

[3] Abraham A. Klein *Bounds for indices of nilpotency and nility.* Archiv der Mathematik, 2000, vol 74:1 pages 6—10

[4] Е. С. Чибриков. *О высоте Ширшова конечнопорождённой ассоциативной алгебры, удовлетворяющей тождеству степени четыре.* Известия Алтайского государственного университета т. 1(19), 2001, стр. 52—56

[5] М. И. Харитонов *Двусторонние оценки существенной выосты в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика., 2(2012), 24—28.

[6] A. A. Lopatin. *On the nilpotency degree of the algebra with identity $x^n = 0$.* arXiv:1106.0950v1.

[7] *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник* No 4, Новосибирск, изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993, 73 стр.

[8] И. И. Богданов *Теорема Нагаты-Хигмана для полуколец.* Фундамент. и прикл. матем. т. 7:3, 2001, 651—658.

[9] Колотов А. Г. *О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами.* Сиб. мат. ж., 1982, т. 23, no 1, стр. 187—189.

[10] Кострикин А. И. *Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986*, 232 стр.

[11] Курош А. Г. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, сер. мат., 1941, т. 5, стр. 233—240.

[12] Латышев В. Н. *К теореме Регева о тождествах тензорного произведения* PI-*алгебр.* Успехи мат. наук, 1972, т. 27, no 4, стр. 213—214.

[13] Ширшов А. И. *О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.* Мат. сб., 1957, т. 41, no 3, стр. 381—394.

[14] Ширшов А. И. *О кольцах с тождественными соотношениями.* Мат. сб., 1957, т. 43, no 2, стр. 277—283.

[15] А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте.* Мат. сб., **203**:4(2012), 81—102.

[16] Belov A. *Some estimations for nilpotence of nil-algebras over field of an arbitrary characteristics and height theorem.* Comm. in Algebra, 1992, vol. 20, N 10, p. 2919—2922.

[17] А. Спивак. *Цепи и антицепи.* Квант, 5(2003), 11—14.

[18] Жевлаков, Слинько, Шестаков, Ширшов. *Кольца близкие к ассоциативным.* М., Наука, 1978.