Периодичность и порядочность

А. Я. Белов, М. И. Харитонов

August 6, 2012

1. Предисловие

Рассмотрим произвольное слово. Если нам очень повезёт, то оно будет "периодическим", то есть маленьким словом, повторённым много раз подряд. Это маленькое слово называется периодом. Поставим теперь в нашем слове знаки умножения между каждыми соседними буквами (операция умножения букв — некоммутативна, то есть $ab \neq ba$). Теперь о нашем периодическом слове можно говорить как о степени периода.

Однако произвольные слова редко бывают периодическими. Намного чаще слово является произведением нескольких периодических слов. Назовём такое слово кусочно-периодическим. Кроме того, любое слово можно представить как произведение периодических подслов и "прокладок" между ними.

Рассмотрим множество слов над алфавитом $A = \{a_1, \dots, a_s\}$. Порядок на множестве букв $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_s$ индуцирует лексикографический порядок на множестве слов. Пусть $U \prec V$, если первая буква слова U меньше первой буквы V, при их совпадении смотрим на вторые буквы и т.д. Если же одно из слов есть начальная часть другого, то слова U и V считаются *несравнимыми*. Примерно так расположены слова в словаре (только более короткие слова из несравнимых считаются младшими). В словах наблюдаются *беспорядки* – когда старшая буква идет перед младшей. Бывают, однако, беспорядки разной силы. Назовем *k-беспорядком* набор из k неперекрывающихся подслов, идущих в порядке убывания, а слово, имеющее k-беспорядок, — *k-разбиваемым*. Слово называется *k-порядочным*, если оно k-разбиваемо, но не $(k+1)$-разбиваемо. Например, слово $aacbcbb$ — 3-порядочно, так как в нем есть 3 подслова, идущие в порядке убывания, а именно - c, bc, bb.

Оказывается, что степень разбиваемости слова и количество периодических подслов тесно связаны. Данный проект посвящён связи между упорядоченностью и кусочной разбиваемостью в словах.

Теорема Ширшова о высоте утверждает, что существует некоторая функция $H(k, s)$ такая, что все не k-разбиваемые слова можно разбить на $H(k, s)$ кусков, каждый из которых есть подслово периодической последовательности с длиной периода меньше k.

Главной задачей проекта является получение наилучшей оценки на $H(k, s)$.При получении такой оценки мы будем использовать теорему Дилуорса, которая сформулирована в главе 3.

При доказательстве теоремы Ширшова важна лемма, сформулированная как задача 2.10.

Целью проекта является получение конструктивных оценок на функцию $H(k, S)$. Другой нашей целью является перечисление *полилинейных* слов (т.е. каждая буква входит в такое слово только один раз), не имеющих k-беспорядков. Количество полилинейных не 3-разбиваемых слов есть число Каталана.

Мы изучаем также количество кусков фиксированного периода. При этом возникают комбинаторные вопросы теории графов типа теории Рамсея.

Ключевыми задачами до промежуточного финиша являются задачи 2.10, 3.7, 4.11, 4.12.

Отдельно от проекта мы приводим также серию "Приложения к теории колец, немного истории", посвященную приложениям к теории колец. Сама эта серия независима от остального материала, но она дает мотивировку, показывая, как из теоремы о высоте вытекает решение ряда долго стоявших проблем теории колец.

2. Цикл "Комбинаторика"

Задача 2.1. *Карлсон может писать только те слова, которые не содержат подслов из двух различных букв. Сколько слов длины n может написать Карлсон, если в словаре l букв?*

Задача 2.2. *В словаре племени Винни–Пухов 20 слов. В фразах их языка возможны любые сочетания этих слов. Существуют два магических заклинания, "Земля стоит на великом крокодиле" и "Каждый вечер крокодил глотает солнце", которые вызывают ураган, и поэтому вслух можно произносить только такие фразы, в которых эти последовательности слов не встречаются*[1]*. Сколько всего фраз из десяти слов можно произносить вслух?*

Задача 2.3. *В алфавите смешариков l букв. Может ли в их словаре содержаться слово длины l, у которого ровно*

a) $l+1$

b) $\frac{l(l-1)}{2}-1$

c) $2l$

различных подслов.

Задача 2.4. *В алфавите индейцев N букв. Из них индейцы составляют слова. Известно, что любое слово, повторенное дважды, означает то же самое, что и само слово, а замена подслова на его квадрат не меняет смысла всего слова. Например,* **горород** *означает то же, что и* **город**. *Докажите, что в языке индейцев конечное число понятий, если:*

a) $N=2$*;*

b)* $N=3$.

*c**) Для произвольного* N

Задача 2.5. *Назовём* запретом *слово, которое мы запрещаем использовать в качестве подслова. Соответственно слово, не содержащее запретов, называем разрешённым. Какое минимальное число запретов нужно задать, чтобы среди стобуквенных слов ровно два — $(ab)^{50}$ и $(ba)^{50}$ — были разрешены?*

[1] Даже если слова в других словарных формах.

Запись u^t означает слово u, написанное t раз подряд.

Задача 2.6. *Пусть k, t – некоторые натуральные числа. Докажите, что если в слове V длины $k \cdot t$ не больше k различных подслов длины k, то для некоторого слова v слово V включает в себя подслово вида v^t.*

Задача 2.7. *Установите биекцию между следующими двумя множествами:*

- *последовательности натуральных чисел $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, где $a_i \leqslant i$;*
- *перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей последовательности не больше 2.*

Задача 2.8. *Сто людоедов приехали на пир. Обедающий людоед проглатывает целиком себе подобного. Пообедавший людоед, конечно, может и сам сослужить обедом для другого своего собрата. Так и составляются пищевые цепочки. Длиной цепочки назовем количество людоедов, вложенных друг в друга. Вопрос: какой максимальной длины цепочка точно присутствует, если известно, что какие бы десять людоедов мы не взяли, среди них найдутся два экземпляра, один из которых покоится в желудке другого?*

Задачи типа 2.8 Вы можете найти в цикле “Теорема Дилуорса”.

Определение 2.1. *Слово u назовем* нециклическим, *если u нельзя представить в виде v^k, где $k > 1$.*

Задача 2.9. *Пусть u и v – различные нециклические слова длины m и n соответственно. Слово W содержит подслова $u' = u^{m \cdot n}$ и $v' = v^{m \cdot n}$. Докажите, что длина общей части у u' и v' не больше $m + n - 2$.*

Задача 2.10. *На бесконечной ленте в каждой ячейке написаны цифры от 1 до 9. Докажите, что тогда либо из неё можно вырезать 10 непересекающихся тысячезначных чисел в порядке убывания, либо какое-то число длины меньше 10 повторится 50 раз подряд.*

3. Цикл “Теорема Дилуорса”

Задача 3.1. *Из любых ли пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

Задача 3.2. *Из любых ли девяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

Задача 3.3. *Докажите, что из любых десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания.*

Задача 3.4. *Докажите, что среди любых $mn + 1$ различных чисел найдутся либо $m + 1$ в порядке убывания, либо $n + 1$ в порядке возрастания.*

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) M — это множество, для любых двух элементов a, b которого известно, находятся они в некотором отношении $\prec$ или нет. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

X если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$;

X если $a \prec b$, то a не равно b.

Задача 3.5. *Возможно ли, что неравенства $a \prec b$ и $b \prec a$ выполнены одновременно?*

Задача 3.6. *Докажите, что слова образуют ЧУМ при отношении, порождённом лексикографическим порядком.*

Определение 3.1. *Множество, любые два элемента которого сравнимы, называют линейно упорядоченным* или*, коротко, цепью.*

Задача 3.7. *Пусть m, n – некоторые натуральные числа. В частично упорядоченном множестве из $mn+1$ элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания $m+1$ элементов, либо $n+1$ попарно несравнимых элементов (так называемая антицепь).*

Задача 3.8. *Обозначим через d наибольшее количество элементов цепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на d антицепей.*

Более того, верен следующий факт, который окажет нам серьёзную помощь в дальнейшем:

Теорема Дилуорса. Обозначим через n наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на n цепей.

4. Цикл “Экспоненциальная оценка”

Пусть наш алфавит состоит из букв $a_1, a_2, \dots, a_s$. Будем считать, что $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_s$. Таким образом, мы упорядочили буквы алфавита. Рассмотрим теперь два слова u и v. Если одно из них является началом другого, то назовём слова u и v *несравнимыми* (по отношению друг к другу). В противном случае найдутся слова w, u', v' такие, что $u = wu'$, $v = wv'$, причём первые буквы у слов u' и v' – различные (w может быть пустым, u' и v' – нет). Если первая буква u' больше первой буквы v', то считаем слово u больше слова v, в обратном случае считаем u меньше v. Таким образом, мы частично упорядочили слова. Приведённый порядок называется *лексикографическим* (мы уже обсуждали его в предисловии). Не стоит также забывать, что некоторые слова так и остались несравнимыми.

Задача 4.1. *Пусть алфавит состоит из трёх букв: a, b и c. Введём на них порядок $a < b < c$. Составьте из приведённого ниже списка слов наиболее длинную возрастающую последовательность. Какие пары слов являются несравнимыми?*

$$cb, abc, bac, abb, b, ccc, abc$$

Для дальнейшей работы нам потребуется ввести несколько вспомогательных определений.

Определение 4.1. *Слово W – n-*разбиваемо*, если найдутся слова $u_1, u_2, \dots, u_n$ такие, что $W = v \cdot u_1 \cdots u_n$, при этом $u_1 \succ \ldots \succ u_n$.*

Определение 4.2. *Слово называется k-*порядочным*, если оно k-разбиваемо, но не $(k+1)$-разбиваемо.*

Задача 4.2. *Найдите число*

a) 1-порядочных

b) 2-порядочных

слов длины s, все буквы которых различны;

c) 1-порядочных слов длины s, буквы которых необязательно различны.

Задача 4.3. *a) Пусть n – некоторое натуральное число, u – нециклическое слово длины не меньше n. Докажите, что слово u^{2n} является n-разбиваемым.*

b) Пусть u — некоторое слово длины $(n-1)$. Докажите, что слово u^{2n} — не n-разбиваемое.

Определение 4.3. *a) Слово v —* хвост *слова u, если найдется слово w такое, что $u = wv$.*

б) Если в слове v содержится подслово вида u^t, то будем говорить, что в слове v содержится период цикличности *t.*

Задача 4.4. *Пусть x, d — некоторые натуральные числа. Докажите, что в слове W длины x либо первые $[x/d]$ хвостов попарно сравнимы, либо в слове W найдется период длины d.*

Здесь и далее: если в формулировке задачи встречаются числа n и d, то считаем, что $n \leqslant d$.

Определение 4.4. *Слово W — (n,d)-*сократимое*, если оно либо n-разбиваемо, либо найдется u^d — подслово слова W.*

Задача 4.5. *Докажите, что если в слове W найдутся n одинаковых непересекающихся подслов длины n, то W — (n,n)-сократимое.*

Определение 4.5. *Слово W будем называть* n-разбиваемым в хвостовом смысле, *если найдутся* хвосты $u_1, \ldots, u_n$ *такие, что* $u_1 \succ u_2 \succ \ldots \succ u_n$ *и для любого* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *начало* u_i *слева от начала* u_{i+1}.

Задача 4.6. *Докажите, что если слово W является*

a) n^3d-разбиваемым в хвостовом смысле,

b) $3n^2d$-разбиваемым в хвостовом смысле,

c) $4nd$-разбиваемым в хвостовом смысле,

то оно — либо n-разбиваемо, либо W содержит подслово в степени d.

Задача 4.7. *Для каждой пары натуральных чисел (n,d) (кроме пары $(1,1)$) приведите пример слова W длины $(nd-1)$ такого, что W — не $(n+1,d)$-сократимо и не содержит последовательности возрастающих хвостов длины $(n+1)$.*

Задача 4.8. *Попробуйте улучшить оценку в задаче 4.6.*

Фиксируем алфавит из s букв, слово W длины $r(W)$ над этим алфавитом и натуральные числа $n \leqslant d$. Далее будем считать, что W не содержит подслова в степени d и слово W не $4nd$-разбиваемо в хвостовом смысле. Рассмотрим его первые $[r(W)/d]$ хвостов (далее будем обозначать это множество хвостов за Ω). Тогда по теореме Дилуорса их можно раскрасить в $(4nd-1)$ цветов так, чтобы хвосты одного цвета шли в порядке возрастания. Для решения следующих задач следует пользоваться предыдущими задачами из цикла.

Задача 4.9. *Докажите, что среди любых $4nd^2$ хвостов из Ω найдутся два одноцветных хвоста, у которых отличаются начальные подслова длины $4nd$.*

Задача 4.10. *В бесконечном парламенте у каждого не более 3 врагов. Доказать, что его можно разбить на 2 палаты так, что у каждого будет не более одного врага в своей палате.*

Теперь перестанем фиксировать числа s, n, d и слово W. Будем считать, что s, n, d — некоторые натуральные числа такие, что $n \leqslant d$, а слово W — некоторое слово над алфавитом из s букв.

Задача 4.11 (Лемма Ширшова). *Докажите, что существует функция от натуральных аргументов $f(s,n,d)$ такая, что для любого слова W над алфавитом длины s, не являющегося (n,d)-сократимым, $r(W) < f(s,n,d)$.*

Задача 4.12. *Докажите,что $f(s,n,d) < s(4nd)^{4nd+2}$.*

5. Улучшение экспоненциальной оценки

Для некоторых натуральных чисел s, n, d таких, что $d \geqslant n$, предположим, что слово W над алфавитом длины s — не (n, d)-сократимое (то есть либо n-разбиваемое, либо найдется u^d — подслово слова W). Пусть Ω — множество хвостов слова W, которые начинаются с его первых $[r(W)/d]$ букв. Напомним что хвосты раскрашены в $4nd-1$ цветов (эти понятия были введены в цикле "Экспоненциальная оценка"). Введём обозначение $p_{n,d} = 4nd$. Будем называть Pk-*началом* некоторого слова слово, состоящее из его первых k букв.

Задача 5.1. *Пусть в множестве Ω нашлось $p_{n,d}^2 + p_{n,d} + 1$ хвостов одного цвета с попарно различными $2k$-началами, где k — некоторое натуральное число. Докажите, что среди этих хвостов найдутся два с различными k-началами.*

Задача 5.2. *Докажите, что среди любых $(d+1)p_{n,d}^4$ хвостов из Ω найдутся два одноцветных хвоста с разными $p_{n,d}/2$-началами.*

Задача 5.3. *Докажите, что среди любых $(d+1)p_{n,d}^7$ хвостов из Ω найдутся два одноцветных хвоста с разными $p_{n,d}/4$-началами.*

Будем считать, что $p_{n,d} = 2^t$ для некоторого натурального числа t.

Задача 5.4. *Докажите, что среди любых $(d+1)p_{n,d}^{1+3t}$ хвостов из множества Ω найдутся два одноцветных хвоста с различными 1-началами.*

Задача 5.5. *Докажите, что если длина слова W больше, чем $(d+1)^2 p_{n,d}^{2+3t} s$, то оно либо n-разбиваемое, либо либо найдется u^d — подслово слова W.*

Пользуясь понятиями листка "Приложения к кольцам, немного истории" и задачей 5.5, можно получить отрицательный ответ на вопрос Е. И. Зельманова, поставленный в 1991 году:

"Пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по m?"

Будем считать, что $n = 2^q$ для некоторого натурального числа q.

Задача 5.6. *Пусть Γ — (бесконечное) множество, состоящее из слов длины $< n$ над алфавитом длины s и их всевозможных степеней. Пользуясь задачами 4.3а, 5.5, докажите, что если слово W — не n-разбиваемое, то его можно представить в виде произведения менее, чем $n^{100q} s$ слов из множества $Gamma$.*