

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

на правах рукописи

Карамзин Дмитрий Юрьевич

**Необходимые условия оптимальности в различных
классах экстремальных задач управления**

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

**Москва
2003**

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Арутюнов

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук,
профессор Л.А. Бекларян
кандидат физико-математических наук,
доцент М.М. Потапов

Ведущая организация

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Защита состоится 28 ноября 2003 г. в 14³⁰ часов на заседании
Диссертационного совета К 501.001.07 при Московском государственном
университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы,
МГУ, факультет Вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ.

Автореферат разослан 25 октября 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н.



В.М. Говоров

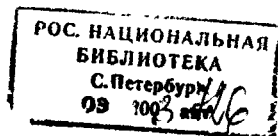
2003-A
18143

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена изучению необходимых условий оптимальности в различных классах экстремальных задач управления.

В *первой главе* рассматривается обычная задача оптимального управления при самых общих предположениях относительно динамики управляемой системы (т.е. нет ни линейности по управлению, ни выпуклости векторграммы и т.д.). В работе [2] А.В. Арутюновым был предложен метод гладкого возмущения, с помощью которого исходная задача (предполагается, что она имеет решение) может быть приближена задачами с минимумом в обобщенных управлениях. Но для задачи с минимумом в обобщенных управлениях Принцип Максимума (ПМ) и условия второго порядка уже известны [3] (они получены А.В. Арутюновым методом штрафных функций). Тем самым результаты работы [3] распространяются на исходную, невыпуклую задачу. В настоящей работе метод гладкого возмущения перенесен на случай задачи с фазовыми ограничениями. Далее в первой главе для задачи с измеримым нефиксированным временем и фазовыми ограничениями доказывается ПМ. При этом особое внимание уделяется условиям трансверсальности по времени в форме [1], с помощью которых в предположениях гладкости, регулярности и управляемости получается невырождающийся ПМ [1]. Говорят, что ПМ вырождается, если его условия могут быть удовлетворены тривиальным набором множителей с $\lambda_0 = 0$ и $\psi(t) = 0 \forall t \in (t_0, t_1)$, но, возможно, $\psi(t_k) \neq 0$, $k = 0, 1$ (ведь в задаче с фазовыми ограничениями сопряженная переменная есть функция с ограниченным изменением и, следовательно, может иметь скачки). Тогда общепринятое условие нетривиальности $\lambda_0 + \sup |\psi(t)| > 0$ удовлетворяется, хотя ПМ, очевидно, не информативен, поскольку условие максимума не дает никакой полезной информации относительно значений оптимального управления.

Обратимся к истории вопроса. Впервые ПМ для задач с фазовыми ограничениями был получен Р.В. Гамкредидзе [19]. ПМ в форме Гамкредидзе имеет ряд достоинств и недостатков. С одной стороны он не вырождается, а мера η имеет лишь абсолютно непрерывную составляющую и конечное число атомарных составляющих. С другой стороны, он доказан лишь для так называемых "регулярных" траекторий, которые, например, имеют лишь конечное число выходов на границу фазовых ограничений, а оптимальное управление предполагается кусочно гладким. В 1963 г. для задач с фазовыми ограничениями А.Я. Дубовицкий и А.А. Милютин получили ПМ без априорных предположений относительно оптимальных управлений и траекторий [9]. Оптимальной траектории в этом ПМ разрешено иметь счетное число выходов на границу фазограничения, и Милутиным был даже построен пример линейной задачи с таким свойством. Им же были получены условия, гарантирующие отсутствие у меры η сингулярной составляющей. Недостатком ПМ в форме Дубовицкого-Милутина является то, что для некоторых постановок задачи он вырождается (например, автономная задача быстрогодействия с закрепленными концами, лежащими на границе фазограничения). Впервые на этот факт обратил внимание А.В. Арутюнов в работе [4]. Он же при довольно общих предположениях методом конечномерной аппроксимации доказал модифицированный вариант ПМ [1], который (в отличие от Дубовицкого-Милутина) не вырождается при известных условиях управляемости и регулярности (по этому поводу см. также работу Дубовицких [8]).



Два результата: Гамкрелидзе и Дубовицкого-Милютина, ставшие уже классическими, — это две принципиально разные теоремы и их действительно трудно сравнивать. Правильно было бы сказать, что обе теоремы затрагивают разные аспекты большой и сложной проблемы получения качественного ПМ для задачи с фазовыми ограничениями. Поясним здесь, что фазовые ограничения есть частный случай нерегулярных ограничений смешанного типа и этой нерегулярностью и объясняется вся сложность их исследования.

Во второй главе изучается одна задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций. Задачи оптимального распределения ресурсов относятся к сложным комбинаторным задачам управления проектами [5, 6]. Достаточно законченная теория существует для ряда постановок и, в частности, для случая независимых операций [6]. Предполагается, что скорость операций линейно зависит от количества ресурсов и от состояния операции. Постановка задачи продиктована практическими соображениями. В настоящей работе для этой задачи методом штрафов [1] получены необходимые условия оптимальности в форме ПМ.

В третьей главе рассматривается задача оптимального импульсного управления с векторной мерой. Оптимальное импульсное управление представляет собой интенсивно развивающийся раздел динамической оптимизации, в котором изучаются процессы с разрывными траекториями и нерегулярными управлениями импульсного типа, в качестве которых могут выступать векторные меры или обобщенные функции. Важным стимулом к развитию теории импульсного управления является моделирование физических процессов, управление которыми осуществляется в течение столь кратковременных промежутков, что их можно идеализировать как мгновенные, а результаты воздействия приводят к разрывам фазовых траекторий исследуемой системы. Примеры подобных ситуаций можно найти в механике, ракетодинамике, квантовой электронике, лазеро- и робототехнике, экономике [10]. Помимо чисто физических приложений, становление теории импульсного управления во многом обязано внутренним потребностям самой математики: ведь многие задачи оптимального управления (с линейной по управлению динамикой) не имеют, как правило, решения в традиционном классе абсолютно непрерывных траекторий, если множество допустимых измеримых управлений не ограничено в пространстве L_2 . Однако, если это множество ограничено хотя бы в норме L_1 , то утверждать существование решения можно в более широком классе управлений — в классе так называемых импульсных управлений, в качестве которых (в данном случае) будут выступать борелевские меры. Причем каждому обычному управлению $u(t)$ исходной задачи в расширенной будет отвечать абсолютно непрерывная борелевская мера μ с плотностью $\frac{d\mu}{dt} = u(t)$. Указанный факт есть следствие известного утверждения о слабой-* секвенциальной компактности единичного шара в C^* .

В развитие теории импульсного управления большой вклад внесли работы (в нашей стране) Н.Н. Красовского, А.Б. Куржанского, М.И. Гусева, С.Т. Завалишина, А.Н. Сесекина, В.А. Дыхты, Б.М. Миллера (см. [7, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18]) и работы таких зарубежных ученых как Bressan, Pereira, Rampazzo, Silva, Vinter (см. [20, 21, 22, 23, 24]) и этот список является далеко не полным.

Цель работы. Получение необходимых условий оптимальности в различных экстремальных задачах управления.

Основные результаты.

1. Предложен метод гладкого возмущения задачи, позволяющий произвольную невыпуклую задачу оптимального управления приблизить задачами с минимумом в обобщенных управлениях. Для задачи с измеримым нефиксированным временем и фазовыми ограничениями при общих предположениях относительно данных и постановки задачи доказан ослабленный ПМ, из которого невырождающийся ПМ вытекает при известных условиях управляемости и регулярности.

2. Исследована задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций. Получены необходимые условия оптимальности в форме ПМ, который позже изучен и расшифрован для задачи на MINIMAX.

3. Рассмотрены системы дифференциальных уравнений с векторной мерой. Доказаны теоремы существования и единственности, формула для производной по начальным данным, леммы о предельных переходах. На множестве импульсных управлений введена метрика относительно которой осуществимы корректные предельные переходы в уравнении с векторной мерой. Само импульсное управление есть результат пополнения и определяется с точностью до изометрии как фундаментальная в указанной метрике последовательность абсолютно непрерывных векторных мер. Рассмотрена задача оптимального импульсного управления с векторной мерой со значениями в выпуклом замкнутом конусе и фазовыми ограничениями. Доказан ПМ. Исследованы условия невырожденности. Сформулировано определение управляемой траектории. В условиях гладкости доказан невырождающийся ПМ.

Научная новизна работы. Усилен ряд теорем, ослаблены требования на постановки задач, для которых ранее были выведены необходимые условия оптимальности. Для некоторых задач получены новые, ранее не известные условия.

Теоретическая и практическая ценность работы. Главы 1 и 3 диссертации носят в основном теоретический характер. Результаты главы 2 могут иметь непосредственное практическое приложение в некоторых задачах экономики.

Методы исследования. Основным инструментом исследования является гладкий вариационный принцип [12]. Применяется также метод штрафов [1] и вариационный принцип Экланда [13]. В работе использован аппарат теории дифференциальных уравнений, экстремальных задач, принципа максимума, элементы математического, функционального, выпуклого, негладкого анализ.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на научно-исследовательских семинарах кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа РУДН (рук. Арутюнов А.В.), кафедры оптимального управления ф-та ВМК МГУ (рук. Васильев Ф.П.), научно-исследовательском семинаре при ВЦ РАН (рук. Шаванин А.А.), а также на Всероссийской научной конференции по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания естественнонаучных дисциплин (Москва, РУДН-2003).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографии. Общий объем диссертации 106 страниц, библиография включает 40 наименований.

Краткое содержание работы

В первой главе изучается задача оптимального управления

$$\begin{cases} J(p, u) = e_0(p) \rightarrow \min, \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_1, t_2], \\ E_1(p) \leq 0, \quad E_2(p) = 0, \quad G(x, t) \leq 0, \\ u(t) \in U(x, t) \text{ п.в. } t, \quad p = (x_1, x_2, t_1, t_2), \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь E_1, E_2, G вектор-функции со значениями в $\mathbf{R}^k, j = 1, 2, 3$, фазовая переменная x принимает значения в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$. Вектор u , принимающий значения в $\mathbf{R}^m$, называется управлением. В качестве класса допустимых управлений рассматриваются существенно ограниченные измеримые функции $u(t)$. Многозначное отображение U ставит в соответствие каждой паре (x, t) непустой компакт $U(x, t) \subset \mathbf{R}^m$.

Примем обозначения

$$E_1(p) = \{e_{1,1}(p), \dots, e_{1,k_1}(p)\}, \quad I_1 = \{1, \dots, k_1\},$$

$$E_2(p) = \{e_{2,1}(p), \dots, e_{2,k_2}(p)\}, \quad I_2 = \{1, \dots, k_2\},$$

$$G(x, t) = \{g_1(x, t), \dots, g_{k_3}(x, t)\}, \quad I_3 = \{1, \dots, k_3\},$$

Теорема 2.1. Пусть (p^*, u^*) решение задачи (1) и $c > \|u^*\|_{L_\infty}$. Тогда существуют такие числа $\tau_1 < t_1^*, \tau_2 > t_2^*$, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся зависящие от ε : число $\delta > 0$; последовательность векторов $\{p_k\} \subset \mathbf{R}^{n+2}$, сходящаяся при $k \rightarrow \infty$ к некоторому вектору p_ε ; последовательность функций $\{u_k\} \subset L_\infty[\tau_1, \tau_2]$, сходящаяся при $k \rightarrow \infty$ к некоторой функции u_ε ; числовая последовательность $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$, а также семейства вещественных чисел $\{\xi_{1,\varepsilon}^j\}, j \in I_1, \{\xi_{2,\varepsilon}^j\}, j \in I_2, \{\rho_\varepsilon^j\}, j \in I_3$, такие, что

- 1) $0 \leq \gamma_k \leq 2^{-k} \forall k$;
- 2) $|p^* - p_k|^2 + \|u^* - u_k\|^2 \leq 25\varepsilon^2 \forall k$;
- 3) $\xi_{1,\varepsilon}^j, \rho_\varepsilon^j \geq 0, \xi_{1,\varepsilon}^j, \xi_{2,\varepsilon}^j, \rho_\varepsilon^j \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0 \forall j$;
- 4) процесс $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ является оптимальным в классе обобщенных управлений для следующей задачи:

$$\begin{cases} e_0(p) + \varepsilon \sum_{k=0}^\infty \gamma_k [|p - p_k|^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |u - u_k(t)|^2 dt] \rightarrow \min, \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_1, t_2], \\ e_{1,j}(p) - \xi_{1,\varepsilon}^j e_0(p) \leq \xi_{1,\varepsilon}^j \varepsilon^3, \quad j \in I_1, \quad |p - p_\varepsilon| \leq \delta, \\ e_{2,j}(p) - \xi_{2,\varepsilon}^j e_0(p) \leq \xi_{2,\varepsilon}^j \varepsilon^3, \quad j \in I_2, \\ g_j(x, t) - \rho_\varepsilon^j e_0(p) \leq \rho_\varepsilon^j \varepsilon^3 \forall t \in [t_1, t_2], \quad j \in I_3, \\ u(t) \in U(x, t), \quad |u(t)| \leq c \text{ п.в. } t. \end{cases}$$

Теорема 2.1 обобщает метод гладкого возмущения, полученный в [2], на случай задачи с фазовыми ограничениями. Представленный метод возмущения дает возможность любую задачу оптимального управления, имеющую решение, приблизить задачами с минимумом в классе обобщенных управлений. Зачем это нужно? Для задачи с минимумом в обобщенных управлениях А.В. Арутюновым получены необходимые условия первого и второго порядков (см. [3]). Тогда с помощью построенного возмущения результаты работы [3] обобщаются на случай произвольной невыпуклой задачи оптимального управления.

Применительно к теории Принципа Максимиума (ПМ) изложенный выше метод возмущения (теорема 2.1) имеет один существенный недостаток, который заключается в том, что в возмущенной задаче нарушается согласованность фазовых ограничений с конечными. Значит, с помощью этого метода нельзя доказать невырождающийся ПМ [1]. Отмеченный недостаток метода компенсируется теоремой 5.1, в которой развивая идеи, заложенные в работе [2] и теореме 2.1, с помощью несколько модифицированного метода возмущений мы доказываем ослабленный ПМ [1].

Рассмотрим задачу (1) в более точной формулировке:

$$\begin{cases} J(p, u) = e_0(p) \rightarrow \min, \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_1, t_2], \\ E_1(p) \leq 0, E_2(p) = 0, G(x, t) \leq 0, \\ u = (u_1, u_2), R(x, u_1, t) \leq 0, u_2(t) \in U_2(t) \text{ п.в. } t, \\ p = (x_1, x_2, t_1, t_2), x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь R — вектор-функция со значениями в $\mathbf{R}^{k_4}$, отвечающая ограничениям смешанного типа. Координаты вектора управления u разбиты на две части $u = (u_1, u_2)$, $u_1 \in \mathbf{R}^{m_1}$, $u_2 \in \mathbf{R}^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$. U_2 — заданное многозначное отображение со значениями в $\mathbf{R}^{m_2}$. Выделение у вектора u двух компонент u_1 и u_2 позволяет учесть как смешанные ограничения $R(x, u_1, t) \leq 0$, так и чисто геометрические $u_2 \in U_2(t)$. В качестве класса допустимых управлений рассматриваются существенно ограниченные измеримые функции $u(t)$, такие, что $u_2(t) \in U_2(t)$ п.в.

Теорема 5.1. Пусть (p^*, u^*) оптимальный процесс в задаче (2) и выполнено предположение О), фазовые ограничения согласованы с конечными, смешанные ограничения регулярны. Тогда существуют вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, n -мерная вектор-функция с ограниченным изменением $\psi(t)$, k_4 -мерная измеримая, существенно ограниченная вектор-функция $r(t)$ и борелевская вектор-мера $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{k_3})$, такие, что для $s = 1, 2$ выполняется

$$\psi(t) = \int_t^{t_2} \left[\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(s), s) - \frac{\partial R}{\partial x}(x^*(s), s) r(s) \right] ds - \int_{[t, t_2]} \frac{\partial G}{\partial x}(x^*(s), s) d\eta - \frac{\partial l}{\partial x_2}(p^*, \lambda),$$

$$\psi(t_1^*) = \frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda), \quad \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \langle E_1(p^*), \lambda_1 \rangle = 0,$$

$$r(t) \geq 0, \langle r(t), R(x^*(t), u^*(t), t) \rangle = 0 \text{ п.в. } t \in [t_1^*, t_2^*],$$

$$\eta \geq 0, g_j(x^*(t), t) = 0 \quad \forall t \in \text{supp}(\eta_j), j \in I_3,$$

$$\max_{u \in U(t)} H(u, t) = H(u^*(t), t) \text{ п.в. } t \in [t_1^*, t_2^*],$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,lim\,sup}_{t \rightarrow t_2^*} \max_{u \in U(x_s^*, t)} H(x_s^*, u, (-1)^{s+1} \frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda), t) + (-1)^{s+1} \frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda) &\geq 0, \\ \operatorname{ess\,lim\,inf}_{t \rightarrow t_2^*} \max_{u \in U(x_s^*, t)} H(x_s^*, u, (-1)^{s+1} \frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda), t) + (-1)^{s+1} \frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda) &\leq 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_1}(u^*(t), t) - \frac{\partial R}{\partial u_1}(x^*(t), u^*(t), t) r(t) &= 0 \text{ п.в. } t \in [t_1^*, t_2^*], \\ |\lambda| + \sup_{t \in [t_1^*, t_2^*]} |\psi(t)| + \|\eta\| &> 0. \end{aligned}$$

Здесь $H(x, u, \psi, t) = \langle f(x, u, t), \psi \rangle$ — функция Понтрягина, а $l(p, \lambda) = \lambda_0 e_0(p) + \sum_{j=1}^2 \langle E_j(p), \lambda_j \rangle$ — малый лагранжиан.

Во второй главе изучается следующая задача оптимального распределения ресурсов [5, 6]: даны k линейных динамических систем

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j, \quad t \in [0, t_j], \quad j = 1, \dots, k, \quad u_j \in U_j. \quad (3)$$

Здесь x_j — фазовая переменная, принимающая значения в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$, $j = 1, \dots, k$. Вектор u_j , принимающий значения в $\mathbf{R}^m$, называется управлением. Каждая из систем определена на своем отрезке времени $[0, t_j]$, матрицы A_j, B_j имеют размерности $n \times n$ и $m \times n$ соответственно.

Значение управления u_j в каждый момент времени $t \in [0, t_j]$ выбирается из заданных множеств $U_j \subset \mathbf{R}^m$, каждое из которых выпукло, компактно и содержит нуль: $0 \in U_j$. Для всех $t > t_j$ управление u_j считается равным нулю.

Кроме того, управления u_j связаны совместным ограничением

$$\sum_{j=1}^k C_j u_j \leq b, \quad b \in \mathbf{R}^l, \quad b \geq 0, \quad (4)$$

где C_j — заданные матрицы размеров $m \times l$. Множество векторов $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbf{R}^{mk}$, удовлетворяющих (4), обозначим через U_c . Несложно заметить, что $U_c \subset \mathbf{R}^{mk}$ выпукло, замкнуто и непусто, так как содержит нуль ($b \geq 0$).

Пусть $\tau = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbf{R}^k$ — вектор, компонентами которого являются моменты завершения, $\tau > 0$. Введем в рассмотрение многозначное отображение $U(t, \tau)$, определяемое по следующей формуле

$$U(t, \tau) = \left[\prod_{j=1}^k U_j(t, t_j) \right] \cap U_c, \quad U_j(t, s) = \begin{cases} U_j, & t \leq s, \\ 0, & t > s, \end{cases}$$

где $\prod$ означает декартово произведение множеств. Для каждого момента времени t множество $U(t, \tau) \subset \mathbf{R}^{mk}$ выпукло, компактно и непусто, так как содержит нуль.

Теперь, имея набор векторов начальных значений $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,k})$, вектор времени τ и управление $u(t) \in U(t, \tau)$, можно решить каждую из систем (3) на своем отрезке времени $[0, t_j]$, полагая $x_j(0) = x_{0,j}$, а управление $u_j(t)$ как проекцию вектора $u(t)$ на соответствующее j -е подпространство. Результатом решения будет набор векторов конечных значений $x_T = (x_{T,1}, \dots, x_{T,k})$: $x_{T,j} = x_j(t_j)$, $j = 1, \dots, k$.

Задача заключается в том, чтобы набор векторов x_0 перевести в x_T с наименьшим значением критерия $\varphi(\tau)$, причем в качестве функции $\varphi(\tau)$ может выступать:

1) линейная комбинация моментов t_j , $j = 1, \dots, k$, т.е. $\varphi(\tau) = \sum_{j=1}^k \alpha_j t_j$, где α_j — заданные вещественные константы;

2) функция максимума: $\varphi(\tau) = T_{\max} = \max_{1 \leq j \leq k} t_j$.

Более общая формулировка задачи включает в себя оба случая.

$$\begin{cases} \varphi(p) \rightarrow \min, \\ \dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j, \quad t \in [0, t_j], \quad j = 1, \dots, k, \\ E_1(p) \leq 0, \quad E_2(p) = 0, \\ p = (x_0, x_T, \tau), \quad u(t) \in U(t, \tau) \text{ для почти всех } t. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь вектор-функции $E_s : \mathbb{R}^{k(2n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{k_s}$, $s = 1, 2$, задающие конечные ограничения, т.е. ограничения на концы траекторий $x_j(t)$, $j = 1, \dots, k$ и на вектор времени τ , а также функция $\varphi(p)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Вектор $p = (x_0, x_T, \tau)$ называется конечным вектором.

Положим $I_j(\tau) = \{r : 1 \leq r \leq k, t_r \geq t_j\}$, где $\tau = (t_1, \dots, t_k)$ — вектор времени.

Теорема 4.1 (ПМ). Пусть (p^*, u^*) — решение задачи (5). Тогда существуют число $\lambda_0 \geq 0$, векторы λ_1, λ_2 , абсолютно непрерывные вектор-функции $\psi_j(t)$, $j = 1, \dots, k$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ такие, что

$$\dot{\psi}_j = -A_j^* \psi_j, \quad t \in [0, t_j^*], \quad \psi_j(0) = \frac{\partial l}{\partial x_{0j}}(p^*, \lambda), \quad \psi_j(t_j^*) = -\frac{\partial l}{\partial x_{Tj}}(p^*, \lambda),$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \langle E_1(p^*), \lambda_1 \rangle = 0,$$

$$\max_{u \in U(t, \tau^*)} \sum_{r=1}^k \langle B_r u_r, \psi_r(t) \rangle = \sum_{r=1}^k \langle B_r u_r^*(t), \psi_r(t) \rangle \quad \text{п.в. } t \in [0, T_{\max}^*],$$

$$\max_{u \in U(t_j^*, \tau^*)} \sum_{r \in I_j(\tau^*)} \langle A_r x_r^*(t_j^*) + B_r u_r, \psi_r(t_j^*) \rangle = \sum_{r \in I_j(\tau^*)} \frac{\partial l}{\partial t_r}(p^*) \quad \forall j,$$

$$|\lambda| + \sum_{j=1}^k \max_{t \in [0, t_j^*]} |\psi_j(t)| = 1.$$

Доказательство этой теоремы проводится методом штрафов [1].

Приведем расписывку теоремы 4.1 для задачи на MINiMAX, т.е. для задачи с функционалом $\varphi(\tau) = \max_{1 \leq j \leq k} t_j$. Найдутся не равные одновременно нулю абсолютно непрерывные функции ψ_j , $j = 1, \dots, k$ такие, что

$$\dot{\psi}_j = -A_j^* \psi_j, \quad t \in [0, t_j^*],$$

$$\max_{u \in U(t, \tau^*)} \sum_{r=1}^k \langle B_r u_r, \psi_r(t) \rangle = \sum_{r=1}^k \langle B_r u_r^*(t), \psi_r(t) \rangle \quad \text{п.в. } t \in [0, T_{\max}^*],$$

$$\begin{aligned} & \max_{u \in U(t_1^*, \tau^*)} \sum_{r \in I_1(\tau^*)} \langle A_r x_r^*(t_1^*) + B_r u_r, \psi_r(t_1^*) \rangle = \\ & = \max_{u \in U(t_j^*, \tau^*)} \sum_{r \in I_j(\tau^*)} \langle A_r x_r^*(t_j^*) + B_r u_r, \psi_r(t_j^*) \rangle \quad \forall j. \end{aligned}$$

В третьей главе рассмотрена задача оптимального импульсного управления с векторной мерой.

$$\begin{cases} J(p, u, \mu, \{v_r\}) = e_0(p) \rightarrow \min, \\ dx = f(x, u, t)dt + g(x, t)d\mu, \quad t \in [t_0, t_1], \\ e_1(p) \leq 0, \quad e_2(p) = 0, \quad \varphi(x, t) \leq 0, \\ u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^m \text{ п.в. } t, \quad \text{Range}(\mu) \subset K, \\ p = (x_0, x_1, t_0, t_1), \quad x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x(t_1). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь: e_1, e_2, φ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^{k_j}$, $j = 1, 2, 3$ соответственно, g — матрица, имеющая k_4 столбцов и n строк, x — фазовая переменная, принимающая значения в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, μ — k_4 -векторная борелевская мера, заданная на отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ и принимающая значения в выпуклом замкнутом конусе K , $\{v_r\}$ — семейство измеримых вектор-функций, рассматриваемых на отрезке $[0, 1]$, зависящее от параметра $r \in T$ и определенным образом связанное с векторной мерой μ .

Определим понятие решения для уравнения с векторной мерой в задаче (6) [10, 17, 18, 21]. Пусть $\Delta \in K$, $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^{k_4})$ и $\gamma \geq |\Delta| = \sum_{j=1}^{k_4} |\Delta^j|$. Тогда элементами множества $\mathcal{H}_K(\Delta; \gamma) \subset \mathbb{L}_{\infty}^{k_4}([0, 1])$ являются измеримые существенно ограниченные вектор-функции $v = (v^1, \dots, v^{k_4})$, заданные на отрезке $[0, 1]$ и принимающие значения в конусе K , такие, что

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=1}^{k_4} |v^j(s)| = \gamma \text{ п.в. } s \in [0, 1]; \\ 2) \quad & \int_0^1 v^j(s)ds = \Delta^j, \quad j = 1, \dots, k_4. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что множество $\mathcal{H}_K(\Delta; \gamma)$ всегда не пусто при $\gamma = |\Delta|$, а при $\gamma > |\Delta|$ это множество может быть как пустым так и не пустым (в зависимости от выбранного конуса K и соотношения чисел γ и $|\Delta|$).

Если μ векторная мера, то:

- $|\mu| = \sum_{j=1}^{k_4} |\mu^j|$, где мера $|\mu^j|$ есть вариация заряда μ^j ;
- $\text{Ds}(\mu) = \{r \in T : |\mu|(\{r\}) > 0\}$ — дискретный носитель μ ;
- μ_c — её непрерывная составляющая, т.е. векторная неатомическая мера, компонентами которой служат непрерывные составляющие компонент μ ;
- $\mu(\{r\})$ — вектор из K , равный значению μ на одноточечном множестве $\{r\}$.

Семейство векторных функций $\{v_r\}$, зависящее от параметра $r \in T$, будем называть *присоединенным* к векторной мере μ , если существует семейство неотрицательных чисел $\{\gamma_r\}$, $r \in T$, в котором не более чем счетное число элементов отлично от нуля, такое, что $\sum \gamma_r < \infty$ и $v_r \in \mathcal{H}_K(\mu(\{r\}); \gamma_r) \quad \forall r \in T$.

Импульсным управлением в задаче (6) будем называть пару $q = (\mu; \{v_r\})$, где μ векторная мера со значениями в конусе K , а $\{v_r\}$ некоторое присоединенное к μ семейство функций. *Вариацией* импульсного управления $q = (\mu; \{v_r\})$ будем называть скалярную борелевскую меру $|q| = |\mu_c| + \sum \gamma_r \delta_r$. Здесь δ_r означает меру Дирака,

сосредоточенную в точке r . Из определения присоединенного семейства сразу вытекает, что $Ds(\mu) \subseteq Ds(|q|)$ (заметим, что вложение может быть строгим). Кроме того, $v_r = 0$ как только $r \notin Ds(|q|)$. Таким образом, семейство $\{v_r\}$ по существу зависит от параметра $r \in Ds(|q|)$ и имеет не более чем счетное число функций, отличных от нуля. Отметим также, что в случае, когда конус K вложен в положительный ортант, определение присоединенного семейства упростится. Действительно, тогда функции v_r неотрицательны, откуда $|q| = |\mu|$, т.е. вариация импульсного управления совпадает с вариацией векторной меры (что вообще говоря неверно для произвольного конуса). Отсюда $v_r \neq 0 \Leftrightarrow r \in Ds(\mu)$, если $K \subseteq \mathbb{R}_+^{k_1}$. Последнее утверждение также всегда верно для произвольного острого конуса.

Пусть $r \in T$, $v \in L_\infty^k([0, 1])$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда функция $\alpha_r(\cdot) = \alpha_r(\cdot; x, v)$ определяется как решение следующей системы уравнений:

$$\dot{\alpha}_r = g(\alpha_r, r)v, \quad s \in [0, 1], \quad \alpha_r(0) = x.$$

Положим $\xi(x, r, v) = \alpha_r(1)$.

Перейдем непосредственно к определению решения. Зафиксируем произвольное импульсное управление $q = (\mu; \{v_r\})$. Функция $x(t)$, заданная на отрезке T , называется решением уравнения (6), отвечающим набору (x_0, u, q) , если $x(t_0) = x_0$ и

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x, u, s)ds + \int_{[t_0, t]} g(x, s)d\mu_s + \\ + \sum_{r \in Ds(|q|), r \leq t} [\xi(x(r^-), r, v_r) - x(r^-)], \quad \forall t > t_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Данное определение корректно в следующем смысле. Пусть μ_i — последовательность абсолютно непрерывных векторных мер, слабо сходящаяся к векторной мере μ , и пусть x_i — абсолютно непрерывная траектория, отвечающая μ_i в силу (теперь уже обычного) дифференциального уравнения задачи (6). Тогда существует присоединенное к μ семейство функций $\{v_r\}$ такое, что траектория $x(t)$, отвечающая в силу уравнения (7) импульсному управлению $q = (\mu, \{v_r\})$, является предельной для $\{x_i\}$. Точнее, переходя к подпоследовательности, $x_i(t) \rightarrow x(t) \quad \forall t \notin Ds(|q|) \setminus \{t_0, t_1\}$.

И обратно: для любой функции $x(t)$, являющейся решением в смысле (7) существует слабо сходящаяся к μ последовательность абсолютно непрерывных векторных мер, такая, что последовательность соответствующих траекторий сходится к $x(t)$. Строгие формулировки и доказательства приведенных фактов содержатся в п. 3.

Если $\phi(x, t)$ — непрерывная скалярная функция, то положим

$$\text{gcsup}_{t \in T} \phi(x, t) = \max_{t \in T} \max_{s \in [0, 1]} \phi(\alpha_t(s; x(t^-), v_t), t).$$

Неравенство $\varphi(x, t) \leq 0$ в (6) следует понимать в обобщенном смысле:

$$\varphi(x, t) \leq 0 \Leftrightarrow \text{gcsup} \varphi^j(x, t) \leq 0, \quad j = 1, \dots, k_3.$$

Это означает, что траектория $x(t)$ удовлетворяет фазовым ограничениям если и только если 1) $\varphi(x(t), t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$; 2) $\varphi(\alpha_r(s), r) \leq 0 \quad \forall s \in [0, 1] \quad \forall r \in Ds(|q|)$ (см. также [10, 17, 18]).

На фиксированном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ доказана

Теорема 9.2. Пусть (p^*, u^*, q^*) , $q^* = (\mu^*; \{v_r^*\})$ — решение задачи (6) и фазовые ограничения согласованы с концепциями. Тогда существуют число $\lambda_0 \geq 0$, векторы $\lambda_j \in \mathbf{R}^{k_j}$, $j = 1, 2$, $\lambda_1 \geq 0$, вектор-функция $\psi \in V^n(T)$, вектор-мера $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{k_3})$, $\eta^j \in C_+^*(T)$: $Ds(|q^*|) \cap Ds(\eta) = \emptyset$, а для каждой точки $r \in Ds(|q^*|)$ существует своя вектор-функция $\sigma_r \in V^n([0, 1])$ и своя вектор-мера $\eta_r = (\eta_r^1, \dots, \eta_r^{k_3})$, $\eta_r^j \in C_+^*([0, 1])$ такие, что

$$\psi(t) = \psi_0 - \int_{t_0}^t H_x(s) ds - \int_{[t_0, t]} Q_x(s) d\mu_c^* + \int_{[t_0, t]} \varphi_x^T(x^*, s) d\eta + \Phi(\psi, t), \quad t \in (t_0, t_1],$$

$$\Phi(\psi, t) = \sum_{r \in Ds(|q^*|), r \leq t} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)],$$

$$\begin{cases} d\alpha_r^* = g(\alpha_r^*, r) v_r^* ds, \\ d\sigma_r = -\sum_{j=1}^{k_3} g_x^{jT}(\alpha_r^*, r) \sigma_r v_r^{*j} ds + \varphi_x^T(\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \\ \alpha_r^*(0) = x^*(r^-), \quad \sigma_r(0) = \psi(r^-), \\ \text{supp}(\eta_r^j) \subseteq \{s : \varphi^j(\alpha_r^*(s), r) = 0\}, \quad j = 1, \dots, k_3, \quad r \in Ds(|q^*|); \end{cases}$$

$$\psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*, \lambda), \quad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda);$$

$$\langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle = 0, \quad \varphi^j(x^*(t), t) = 0 \quad \eta^j\text{-п.в.} \quad \forall j;$$

$$\max_{u \in U(t)} H(u, t) = H(t) \text{ п.в.};$$

$$g \sup \langle Q(t), m \rangle \leq 0 \quad \forall m \in K, \quad \int_T \langle Q(t), dq^* \rangle = 0;$$

$$|\lambda| + \|\eta\| + \sum_{r \in Ds(|q^*|)} \|\eta_r\| = 1.$$

Замечание. Здесь $Q(x, \psi, t) = \psi^T g(x, t)$. Пусть $m_c^* = \frac{d\mu_c^*}{d|\mu_c^*|}$ — производная Радона-Никодима векторной меры μ_c^* по мере $|\mu_c^*|$. Тогда из условий теоремы вытекает:

- 1) $Q(t) \in K^\circ \quad \forall t \in T$ и $Q_r(s) \in K^\circ \quad \forall s \in [0, 1] \quad \forall r \in Ds(|q^*|)$;
- 2) $\langle Q(t), m_c^*(t) \rangle = 0 \quad |\mu_c^*|$ -п.в. и $\langle Q_r(s), v_r^*(s) \rangle = 0 \text{ п.в. } s \in [0, 1] \quad \forall r \in Ds(|q^*|)$.

Предположение Г) Функция f непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, а многозначное отображение $U(\cdot)$ постоянно, т.е. $U(t) \equiv U$ для некоторого компакта U .

Определение 1.4. Пусть выполнено предположение Г). Допустимую траекторию $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ будем называть управляемой в конечных точках (относительно фазовых ограничений), если найдутся векторы $u_k \in U$, $m_k \in K$ такие, что

$$\langle \varphi_x^j(x_k, t_k), f(x_k, u_k, t_k) + g(x_k, t_k) m_k \rangle + \varphi_t^j(x_k, t_k) < 0 \quad \forall j : \varphi^j(x_k, t_k) = 0,$$

где $x_k = x(t_k)$, $k = 0, 1$.

Если $g \equiv 0$ или μ из класса абсолютно непрерывных векторных мер с плотностью в L_∞ , то определение 1.4 превращается в известное определение управляемости для связанной с (6) обычной задачи оптимального управления [1, с.112].

Для задачи с нефиксированным временем получена

Теорема 9.3. Пусть (p^*, u^*, q^*) — решение задачи (6), выполнено предположение Г), фазовые ограничения согласованы с конечными, фазовые и конечные ограничения регулярны и оптимальная траектория управляема в конечных точках относительно фазовых ограничений. Тогда существуют число $\lambda_0 \geq 0$, векторы $\lambda_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $j = 1, 2$, $\lambda_1 \geq 0$, вектор-функция $\psi \in V^n(T^*)$, скалярная функция $\phi \in V(T^*)$, вектор-мера $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{k_3})$, $\eta^j \in C_+^{k_j}(T^*)$: $Ds(|q^*|) \cap Ds(\eta) = \emptyset$, а для каждой точки $r \in Ds(|q^*|)$ существуют свои вектор-функция $\sigma_r \in V^n([0, 1])$, скалярная функция $\theta_r \in V([0, 1])$ и вектор-мера $\eta_r = (\eta_r^1, \dots, \eta_r^{k_3})$, $\eta_r^j \in C_+^{k_j}([0, 1])$ такие, что

$$\psi(t) = \psi_0 - \int_{t_0^*}^t H_x(s) ds - \int_{[t_0^*, t]} Q_x(s) d\mu_c^* + \int_{[t_0^*, t]} \varphi_x^T(x^*, s) d\eta + \Sigma(\psi, t), \quad t \in (t_0^*, t_1^*],$$

$$\Sigma(\psi, t) = \sum_{r \in Ds(|q^*|), r \leq t} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)],$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0^*}^t H_t(s) ds + \int_{[t_0^*, t]} Q_t(s) d\mu_c^* - \int_{[t_0^*, t]} \varphi_t^T(x^*, s) d\eta + \Theta(\phi, t), \quad t \in (t_0^*, t_1^*],$$

$$\Theta(\phi, t) = \sum_{r \in Ds(|q^*|), r \leq t} [\theta_r(1) - \phi(r^-)],$$

$$\begin{cases} d\alpha_r^* = g(\alpha_r^*, r) v_r^* ds, \\ d\sigma_r = -\sum_{j=1}^{k_3} g_x^j(\alpha_r^*, r) \sigma_r v_r^{j*} ds + \varphi_x^T(\alpha_r^*, r) d\eta_r, \\ d\theta_r = \langle g_t(\alpha_r^*, r) v_r^*, \sigma_r \rangle ds - \varphi_t^T(\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \\ \alpha_r^*(0) = x^*(r^-), \quad \sigma_r(0) = \psi(r^-), \quad \theta_r(0) = \phi(r^-), \\ \text{supp}(\eta_r^j) \subseteq \{s : \varphi^j(\alpha_r^*(s), r) = 0\}, \quad j = 1, \dots, k_3, \quad r \in Ds(|q^*|); \end{cases}$$

$$\psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*, \lambda), \quad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda);$$

$$\phi_0 = -\frac{\partial l}{\partial t_0}(p^*, \lambda), \quad \phi_1 = \frac{\partial l}{\partial t_1}(p^*, \lambda);$$

$$\langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle = 0, \quad \varphi^j(x^*(t), t) = 0 \quad \eta^j\text{-п.в. } \forall j;$$

$$\max_{u \in U} H(u, t) = H(t) \text{ п.в. } t, \quad \max_{u \in U} H(u, t) = \phi(t) \quad \forall t \in (t_0^*, t_1^*];$$

$$\text{gc sup}_{t \in T^*} \langle Q(t), m \rangle \leq 0 \quad \forall m \in K, \quad \int_{T^*} \langle Q(t), dq^* \rangle = 0;$$

$$\lambda_0 + \mathcal{L}(\{t : |\psi(t)| > 0\}) + \sum_{r \in Ds(|q^*|)} \mathcal{L}(\{t : |\sigma_r(t)| > 0\}) |q^*|(\{r\}) = 1.$$

В конце гл. 3 приводится пример (пример 9.1), показывающий, что если условия управляемости (определение 1.4) нарушаются, то ПМ, доказанный в теореме 9.2, может вырождаться (см. также [1, пример 4.1, с.111]).

Литература

- [1] Арутюнов А.В. Условия экстремума. М., Факториал, 1997.
- [2] Арутюнов А.В. Расширения и возмущения задач оптимального управления. Тр. МИАН, 1998, Т. 220, с. 27-34.
- [3] Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Математический анализ, 1989, Т. 27, с. 147-235.
- [4] Арутюнов А.В. К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями. Докл. АН СССР, 1985, Т. 280, N 5, с. 1033-1037.
- [5] Баркалов С.А., Бурков В.Н. Минимизация упущенной выгоды в задачах управления проектами. Москва, Ин-т проблем управления, 2001.
- [6] Бурков В.Н. Модели и методы мультипроектного управления (препринт). Москва, Ин-т проблем управления, 1997.
- [7] Гусев М.И. Об оптимальном управлении обобщенными процессами при невыпуклых фазовых ограничениях. Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975.
- [8] Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением конечных и фазовых ограничений. УМН, 1985, Т. 40, N 2, с. 175-176.
- [9] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР, 1963, Т. 149, N 4, с. 759-762; ЖВМиМФ, 1965, Т. 5, N 3, с. 395-453.
- [10] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М., Физматлит, 2000.
- [11] Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М., Наука, 1991.
- [12] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Несколько замечаний о вариационных принципах. Мат. заметки, 1997, Т.61, N 2, с. 305-311
- [13] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М., Наука, 1988.
- [14] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., Наука, 1968.
- [15] Куржанский А.Б. Оптимальные системы с импульсными управлениями. Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975, с. 131-156.

- [16] Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К управлению линейной системой обобщенными воздействиями. Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5. N 8, с. 1360-1370.
- [17] Миллер Б.М. Условия оптимальности в задачах обобщенного управления. Автоматика и телемеханика, 1992, N 5, с.50-58.
- [18] Миллер Б.М. Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. Автоматика и телемеханика. I. Проблема существования решения, 1995, N 4, с.62-76. II Представление решений с помощью дифференциальных уравнений с мерой, 1995, N 5, с.56-70.
- [19] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1983.
- [20] A. Bressan, F. Rampazzo. Impulsive Control Systems with Commutative Vector Fields. J. of Optimization Theory and Applications, vol. 71 (1991), pp. 67-83.
- [21] F.M.F.L. Pereira and G.N. Silva. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems. Systems and Control Letters 40, 2000, pp. 205-215.
- [22] G.N. Silva and R.B. Vinter. Measure differential inclusions, J. Math. Anal. Appl., 202 (1996), pp. 727-746.
- [23] G.N. Silva and R.B. Vinter. Necessary conditions for optimal impulsive control problems. SIAM J. Control Optim., 35 (1997), pp. 1829-1846.
- [24] R.B. Vinter and F.M.F.L. Pereira. A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories. SIAM J. Control Optim., 26 (1988), pp. 205-229.

Публикации по теме диссертации

- 1) А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Расширение и возмущение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, ВМиК, 2002, N 2, с. 31-35.
- 2) Д.Ю. Карамзин. К теории принципа максимума в задачах с фазовыми ограничениями. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, ВМиК, 2002, N 4, с. 23-31.
- 3) А.В. Арутюнов, В.Н. Бурков, А.Ю. Заложнев, Д.Ю. Карамзин. Задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций. Автоматика и телемеханика, N 5, 2002, с. 108-119.

№ 18143

2003-A

18143

Издательство ООО "МАКС Пресс".

Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.

Подписано к печати 22.10.2003 г.

Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 0,75. Тираж 100 экз. Заказ 834.

Тел. 939-3890, 939-3891, 928-1042. Тел./Факс 939-3891.

119992, ГСП-2, Москва,

Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова.